BTS Mécanique et Automatismes Industriels

Nombres complexes

Lycée Louis Armand, Poitiers, Année scolaire 2006/2007

Table des matières

Nombres complexes

Nombres complexes : exercices

Nombres complexes

1. Les différentes écritures

1.1 - Forme algébrique d'un nombre complexe

On désigne par i le nombre tel que $\boxed{i^2 = -1}$, et on appelle *nombre complexe* tout nombre z ayant une écriture du type

$$\boxed{z = a + ib}$$

où a et b sont des nombres réels. Cette écriture est appelée *forme algébrique*, ou encore *forme cartésienne*, du nombre complexe z, et les nombres a et b sont respectivement appelés *partie réelle* et *partie imaginaire* du nombre complexe z. On note :

$$\boxed{a = \Re\mathrm{e}(z)} \qquad \text{et} \qquad \boxed{b = \Im\mathrm{m}(z)}$$

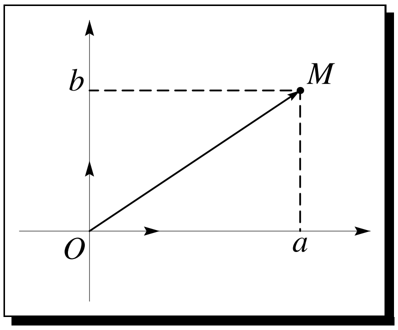
On désigne par $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes. Il contient l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels (on note $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$).

Deux nombres complexes $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$ sont égaux si et seulement si

$$\boxed{a = a' \qquad \text{et} \qquad b = b'.}$$

1.2 - Représentation géométrique d'un nombre complexe

Dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on associe à tout nombre complexe $z = a + ib$ le point M de coordonnées (a, b).



Ce point $M(a, b)$ est appelé *image* du nombre complexe z, et z est appelé *affixe* du point M. De même, Le vecteur $\overrightarrow{OM}$ est nommé *vecteur image* du nombre complexe z, et z est appelé *affixe du vecteur* $\overrightarrow{OM}$.

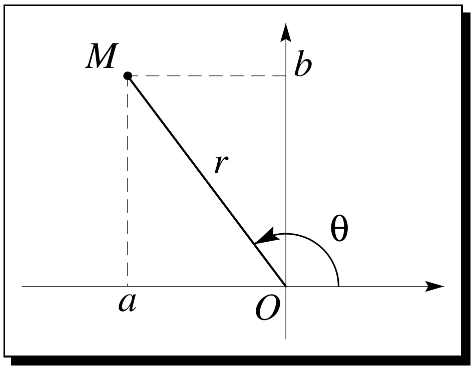
L'axe des abscisses $(O, \vec{u})$ est dit *axe réel*; l'axe des ordonnées $(O, \vec{v})$ est dit *axe des imaginaires*.

Remarques :

- Le point O est l'image du nombre 0.
- Un nombre z réel a pour image un point de l'axe $(O, \vec{u})$
- Un nombre z imaginaire pur (c'est à dire de la forme $z = ib$ avec b réel) a pour image un point de l'axe $(O, \vec{v})$
- Les nombres z et $-z$ ont pour images deux points M et M' symétriques par rapport à O.

1.3 - Forme trigonométrique, forme exponentielle

Soit le nombre complexe $z = a + ib$ et son point image M dans le plan rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{u}, \vec{v})$. Le point M, s'il est différent de l'origine O, est entièrement déterminé par les données de la distance r et de l'angle θ, où



$$r = OM \qquad \text{et} \qquad \theta = (\widehat{\vec{u}, \overrightarrow{OM}}).$$

Ce qui nous donne une autre écriture pour le nombre complexe z. On notera

$$\boxed{z = [r, \theta]} \qquad \text{ou} \qquad \boxed{z = re^{i\theta}}$$

qui sont respectivement appelées *forme trigonométrique* et *forme exponentielle* du nombre complexe z.

On appelle *module* de z, et on note $|z|$, le nombre $|z| = r$. On appelle *argument* de z, et on note $\mathrm{Arg}(z)$, toute mesure de l'angle θ. L'argument d'un nombre complexe n'est donc défini qu'à $2k\pi$ près. On en donne généralement la *détermination principale* qui est la mesure appartenant à l'intervalle $]-\pi, \pi]$.

En conséquence, les nombres $z = [r, \theta]$ et $z' = [r', \theta']$ sont égaux si et seulement si

$$\boxed{r = r'} \qquad \text{et} \qquad \boxed{\theta = \theta' + 2k\pi}, \quad \text{où} \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Pour passer d'une écriture à une autre, on utilise les résultats suivants : si $z = a + ib$, on a

$$\boxed{|z| = r = \sqrt{a^2 + b^2}.}$$

et en considérant les projections orthogonales du point M sur les axes de coordonnées, on obtient les relations

$$a = r\cos\theta, \qquad \text{et} \qquad b = r\sin\theta.$$

On peut alors déterminer θ en utilisant le fait que

$$\boxed{\cos\theta = \frac{a}{r}} \qquad \text{et} \qquad \boxed{\sin\theta = \frac{b}{r}}$$

Réciproquement, si on a la forme exponentielle $z = re^{i\theta}$, on détermine la forme algébrique avec la relation :

$$\boxed{z = re^{i\theta} = r(\cos\theta + i\sin\theta) = a + ib}.$$

Remarque :

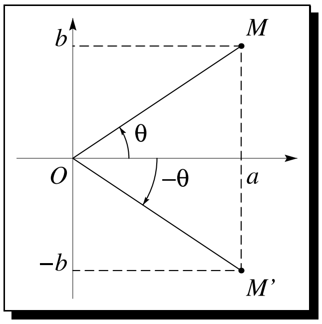
On a donc en particulier $\boxed{e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta}$.

2. Opérations dans l'ensemble $\mathbb{C}$

2.1 - Conjugaison, nombre complexe conjugué

Soit $z = a+ib$ un nombre complexe. On appelle *conjugué* de z, et on note $\bar{z}$ le nombre

$$\bar{z} = a - ib.$$



Si deux nombres complexes z et z' sont conjugués, alors leurs points images respectifs M et M' sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses.

Si la forme trigonométrique de z est $z = [r, \theta] = re^{i\theta}$, on vérifie immédiatement que l'on a

$$\boxed{\bar{z} = [r, -\theta] = re^{-i\theta}}$$

2.2 - Opérations sous forme algébrique

2.2.1 - Addition et multiplication

Les calculs s'effectuent comme dans l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels. Il suffit de remplacer i^2 par -1. Il en résulte en particulier que les identités remarquables restent valables pour les nombres complexes. On a ainsi, si A et B sont deux complexes quelconques :

$$(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2 \qquad (A-B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$$
$$(A+B)^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3 \qquad (A-B)^3 = A^3 - 3A^2B + 3AB^2 - B^3$$
$$A^2 - B^2 = (A-B)(A+B)$$

Et on a en plus l'égalité

$$A^2 + B^2 = (A - iB)(A + iB)$$

2.2.2 - Inverse et quotient de deux nombres complexes

Soit $z = a + ib$ avec $z \neq 0$, alors

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{a - ib}{a^2 + b^2}.$$

Le quotient de deux nombres est défini par $z/z' = z \times 1/z'$.

2.3 - Opérations sous forme trigonométrique

On ne peut utiliser la forme trigonométrique pour additionner ou soustraire deux nombres complexes. Par contre, il est très aisé de multiplier, de diviser, ou d'élever à une puissance entière en utilisant cette écriture.

2.3.1 - Produit, produits itérés

Soit n un nombre entier positif ou négatif. On pose $z = [r, \theta]$ et $z' = [r', \theta']$. On vérifie alors facilement (avec le formulaire de trigonométrie) les relations

$$\boxed{z \times z' = [r, \theta] \times [r'\theta'] = [r \times r', \theta + \theta']} \qquad \text{et} \qquad \boxed{z^n = [r, \theta]^n = [r^n, n \times \theta]}.$$

2.3.2 - Inverse et quotient

On pose $z = [r, \theta]$ et $z' = [r', \theta']$. On vérifie alors facilement (avec le formulaire de trigonométrie) les relations

$$\boxed{\frac{1}{z} = \frac{1}{[r,\theta]} = \left[\frac{1}{r}, -\theta\right]} \qquad \text{et} \qquad \boxed{\frac{z}{z'} = \frac{[r,\theta]}{[r'\theta']} = \left[\frac{r}{r'}, \theta - \theta'\right]}$$

lorsque $z' \neq 0$.

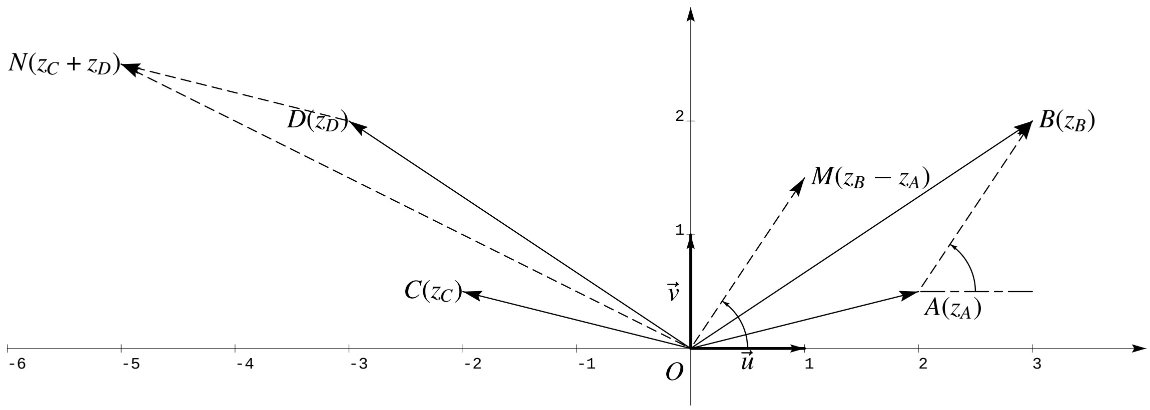
2.3.3 - Avec la notation exponentielle

Soient $z = re^{i\theta}$ et $z' = re^{i\theta'}$. Les règles de calcul précédentes s'écrivent alors

$$\boxed{\frac{1}{z} = \frac{1}{r}e^{-i\theta}}, \qquad \boxed{zz' = rr'\,e^{i(\theta+\theta')}} \qquad \boxed{z^n = r^n e^{in\theta}}, \qquad \text{et} \qquad \boxed{\frac{z}{z'} = \frac{r}{r'}e^{i(\theta-\theta')}}$$

2.4 - Interprétations géométriques

2.4.1 - Addition, soustraction de deux complexes



Soit z_C et z_D deux nombres complexes de points images respectifs C et D. Alors le nombre $z_N = z_C + z_D$ est l'affixe du vecteur $\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}$.

Soit z_A et z_B deux nombres complexes de points images respectifs A et B. Alors le nombre $z_M = z_B - z_A$ est l'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$.

On a donc en particulier,

$$\boxed{AB = |z_B - z_A|} \qquad \text{et} \qquad \boxed{(\widehat{\vec{u}, \overrightarrow{AB}}) = \mathrm{Arg}(z_B - z_A)}$$

2.4.2 - Multiplication d'un complexe par un réel

La multiplication d'un complexe par un nombre réel correspond à la multiplication des vecteurs par un nombre réel. Plus précisément : si a un nombre complexe de vecteur image $\overrightarrow{OA}$ et α un nombre réel quelconque, alors αa est l'affixe du vecteur $\alpha\overrightarrow{OA}$.

3. Quelques propriétés de la conjugaison et des nombres conjugués

Soit z et z' deux nombres complexes. On vérifie immédiatement les relations

$$\boxed{\overline{z+z'} = \overline{z} + \overline{z'} \qquad \text{et} \qquad \overline{z \cdot z'} = \overline{z} \cdot \overline{z'}}$$

On a en outre, si $z = a + ib$ avec a et b réels,

$$\boxed{z + \overline{z} = 2a \qquad z - \overline{z} = 2ib \qquad z\overline{z} = a^2 + b^2 = |z|^2}$$

On en déduit les parties réelles et imaginaires du nombre z :

$$\Re\mathrm{e}(z) = \frac{1}{2}(z + \overline{z}) \qquad \text{et} \qquad \Im\mathrm{m}(z) = \frac{1}{2i}(z - \overline{z})$$

4. Quelques propriétés sur les modules

Comme on l'a vu dans le paragraphe concernant les opérations sous forme trigonométrique, le module est compatible avec la multiplication et la division. Autrement dit, si z et z' sont deux nombres complexes, et si n est un entier relatif, on a

$$\boxed{|z \times z'| = |z| \times |z'|} \qquad \boxed{|z^n| = |z|^n} \qquad \boxed{\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}} \qquad \text{et} \qquad \boxed{\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}}$$

Le module n'est pas compatible avec l'addition. On a néanmoins une majoration du module d'une somme :

$$|z + z'| \leqslant |z| + |z'|$$

Cette relation est connue sous le nom d'*inégalité triangulaire*.

5. Quelques propriétés sur les arguments

Comme pour les module, on a des relations simples concernant les arguments dans le cas du produit ou du quotient de deux nombres complexes : si z et z' sont deux nombres complexes, et si n est un entier relatif, on a

$$\boxed{\mathrm{Arg}(z \times z') = \mathrm{Arg}(z) + \mathrm{Arg}(z') \pmod{2\pi}} \qquad \boxed{\mathrm{Arg}(z^n) = n \times \mathrm{Arg}(z) \pmod{2\pi}}$$

$$\boxed{\mathrm{Arg}\left(\frac{1}{z}\right) = -\mathrm{Arg}(z) \pmod{2\pi}} \qquad \text{et} \qquad \boxed{\mathrm{Arg}\left(\frac{z}{z'}\right) = \mathrm{Arg}(z) - \mathrm{Arg}(z') \pmod{2\pi}}$$

De plus, si z_A, z_B et z_C sont respectivement les affixes des points A, B et C dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$, alors on a

$$\boxed{\mathrm{Arg}(z_B - z_A) = (\widehat{\vec{u}, \overrightarrow{AB}})} \qquad \text{et} \qquad \boxed{\mathrm{Arg}\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = (\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}})}$$

6. Équations du second degré à coefficients réels

On considère l'équation polynômiale d'inconnue complexe z :

$$(E) \qquad az^2 + bz + c = 0$$

où a, b et c sont des constantes réelles avec $a \neq 0$. Posons $\boxed{\Delta = b^2 - 4ac}$ (Δ est appelé *discriminant* du polynôme $az^2 + bz + c$). Alors

- Si $\Delta = 0$, l'équation (E) admet une solution réelle double :
$$x = \frac{-b}{2a}$$
- Si $\Delta > 0$, l'équation (E) admet deux solutions réelles :
$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$
- Si $\Delta < 0$, l'équation (E) n'admet pas de solution réelle, mais elle admet deux solutions complexes :
$$z_1 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a} \qquad \text{et} \qquad z_2 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

7. Formules de Moivre et d'Euler

- Soit $z = e^{i\theta}$. Le nombre z^n (pour $n \in \mathbb{N}$) a pour module 1 et pour argument $n\theta$. On en déduit la *formule de Moivre*

$$\boxed{(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)} \qquad \text{soit} \qquad \boxed{(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}}$$

- De plus, des relations

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta \qquad \text{et} \qquad e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta$$

on déduit les *formules d'Euler*

$$\boxed{\cos\theta = \frac{1}{2}(e^{i\theta} + e^{-i\theta}) \qquad \text{et} \qquad \sin\theta = \frac{1}{2i}(e^{i\theta} - e^{-i\theta})}$$

Ces formules permettent la *linéarisation* des formules trigonométriques (c'est à dire la transformation d'un produit de fonctions trigo en somme de fonctions trigo). Par exemple, on a

$$\begin{aligned}
\cos^3\theta &= \frac{1}{2^3}(e^{i\theta} + e^{-i\theta})^3 \\
&= \frac{1}{8}\left(e^{3i\theta} + 3e^{2i\theta}e^{-i\theta} + 3e^{i\theta}e^{-2i\theta} + e^{-3i\theta}\right) \\
&= \frac{1}{8}\left(e^{3i\theta} + e^{-3i\theta} + 3\left(e^{i\theta} + e^{-i\theta}\right)\right) \\
&= \frac{1}{8}(2\cos 3\theta + 3 \times 2\cos\theta) \qquad \text{soit} \qquad \boxed{\cos^3\theta = \frac{1}{4}\cos 3\theta + \frac{3}{4}\cos\theta}
\end{aligned}$$

La linéarisation est souvent employée pour déterminer une primitive d'un produit de fonctions trigonométriques.

8. Calcul de racines carrées dans $\mathbb{C}$

L'ensemble des nombres complexes possède une propriété remarquable : toute équation polynômiale de degré n y possède exactement n racines (en comptant les ordres de multiplicité). En particulier, si a est un nombre complexe quelconque, l'équation

$$Z^2 - a = 0$$

possède deux solutions complexes z_1 et z_2. On aura donc $z_1^2 = z_2^2 = a$, et z_1 et z_2 seront appelées les *racines carrées* du nombre complexe a.

Résolution pratique

Par exemple, cherchons les deux racines carrées de $3 + 4i$. On pose $z = a + bi$ l'inconnue solution de l'équation $Z^2 = 3 + 4i$. Il vient :

$$(a + ib)^2 = 3 + 4i \iff a^2 - b^2 + 2iab = 3 + 4i \iff \begin{cases} a^2 - b^2 = 3 \\ 2ab = 4 \end{cases}$$

D'autre part, comme $|z|^2 = |3 + 4i|$, on a également $a^2 + b^2 = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$. Finalement, nous avons donc à résoudre le système

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = 3 \\ a^2 + b^2 = 5 \\ 2ab = 4 \end{cases} \iff \begin{cases} 2a^2 = 8 \\ 2b^2 = 2 \\ 2ab = 4 \end{cases} \iff \begin{cases} a^2 = 4 \\ b^2 = 1 \\ 2ab = 4 \end{cases}$$

En remarquant que a et b sont de même signe puisque le produit ab est positif, on en déduit que les deux racines carrées de $3 + 4i$ sont $z_1 = 2 + i$ et $z_2 = -2 - i$.

9. Équations du second degré à coefficients dans $\mathbb{C}$

Soit l'équation

$$(E) \qquad aZ^2 + bZ + c = 0, \qquad \text{où} \qquad a, b, c \in \mathbb{C}.$$

On appelle *discriminant* de cette équation le nombre complexe $\Delta = b^2 - 4ac$. Soit δ une racine carrée de Δ. Alors l'équation (E) admet les deux racines

$$\boxed{z_1 = \frac{1}{2a}(-b - \delta)} \qquad \text{et} \qquad \boxed{z_2 = \frac{1}{2a}(-b + \delta)}.$$

10. Fonctions de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{R}$, lignes de niveau

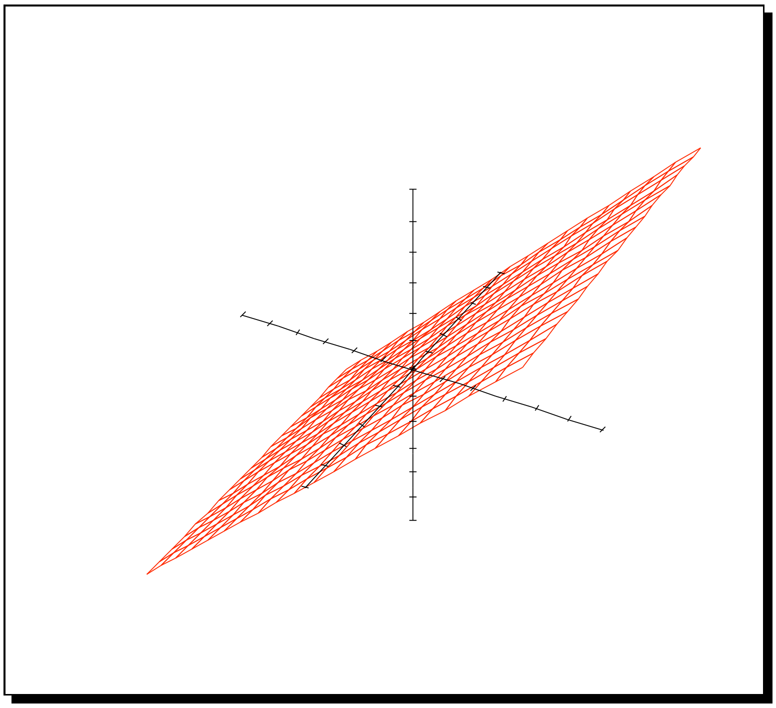
Une fonction de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{R}$ est une fonction f dont l'ensemble de départ est $\mathbb{C}$ et dont l'ensemble d'arrivée est $\mathbb{R}$. Par exemple, la fonction f définie sur $\mathbb{C}$ par $f(z) = |z|$ est une telle fonction.

On peut représenter une fonction de ce type par une surface dans un espace à trois dimensions : deux dimensions pour l'espace de départ, et une pour l'espace d'arrivée. Dans les exemples ci-dessous, l'espace de départ est représenté par un plan horizontal (axes Ox et Oy), alors que l'espace d'arrivée est représenté par une droite verticale (axes Oz).

Considérons donc une fonction $f : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$, et un nombre réel k fixé. On appelle *ligne de niveau k de la fonction f* l'ensemble des points z de $\mathbb{C}$ tels que $f(z) = k$. Géométriquement, la ligne de niveau k d'une fonction f correspond à l'intersection de la surface représentative de la fonction f avec le plan d'ordonnée k sur Oz, parallèle au plan complexe Oxy.

10.1 - La fonction $z \mapsto \Re e(z)$

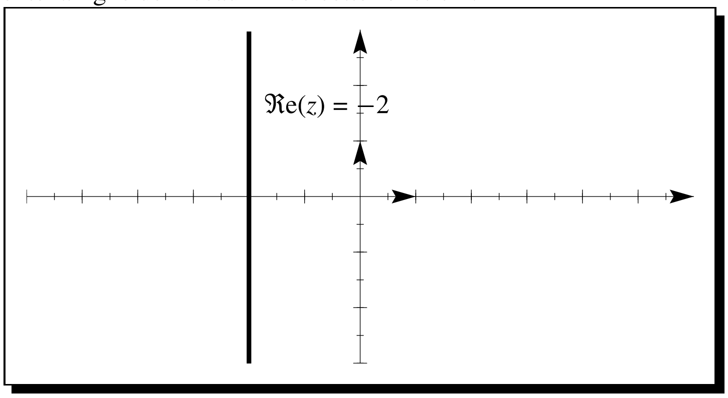
La représentation graphique de cette fonction est la suivante :



La fonction $z \mapsto \Re e(z)$

et la ligne de niveau k de cette fonction correspond à la droite, parallèle à l'axe des ordonnées, d'équation $x = k$.

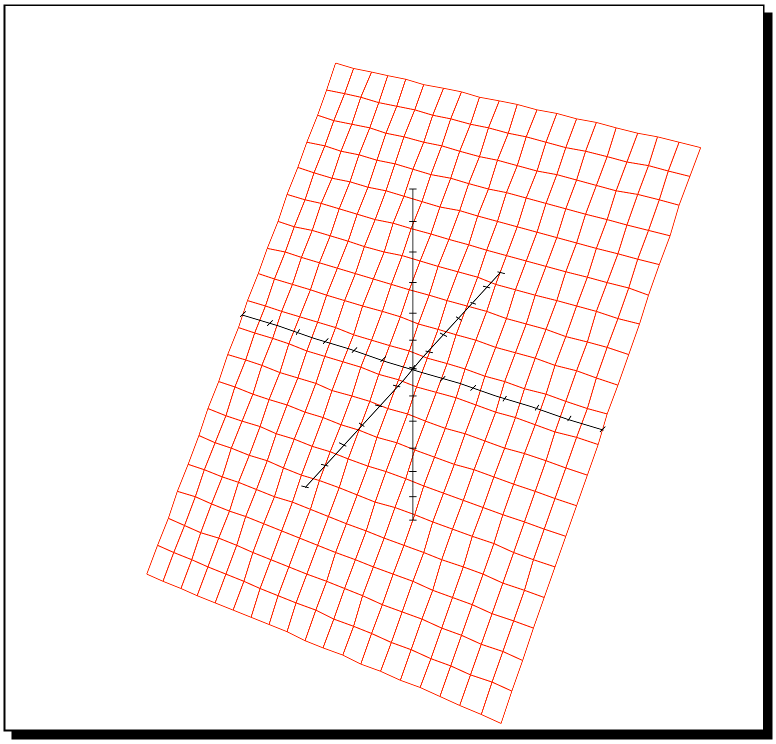
Par exemple, voici représenté la ligne de niveau -2 de cette fonction :



Ligne de niveau -2 de la fonction $z \mapsto \Re e(z)$

10.2 - La fonction $z \mapsto \Im\mathrm{m}(z)$

La représentation graphique de cette fonction est la suivante :

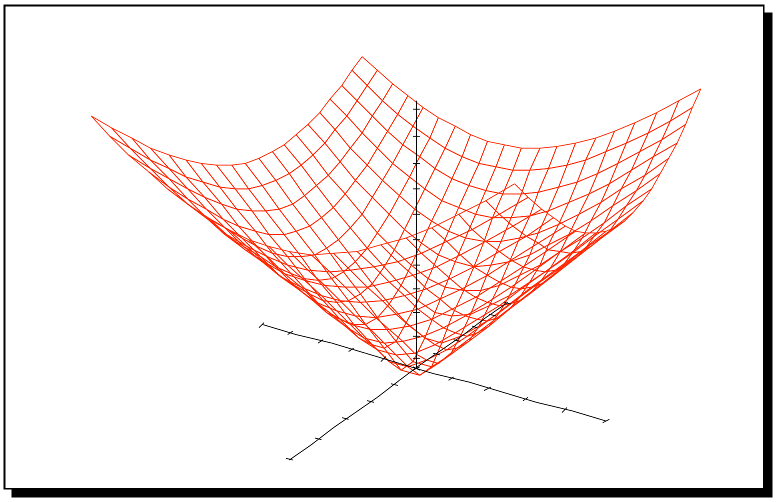


La fonction $z \mapsto \Im\mathrm{m}(z)$

et, de la même façon que pour la fonction précédente, la ligne de niveau k de cette fonction correspond à la droite, parallèle à l'axe des abscisses, d'équation $y = k$.

10.3 - Les fonctions $z \mapsto |z|$ et $z \mapsto |z - z_0|$

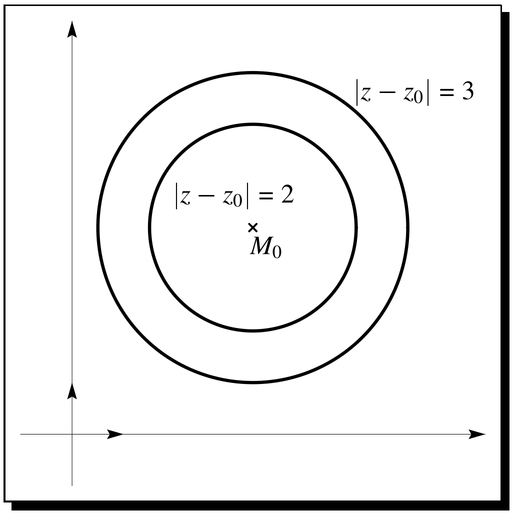
La représentation graphique de la fonction $z \mapsto |z|$ est la suivante :



La fonction $z \mapsto |z|$

La surface ainsi définie est un cône de sommet O et d'axe Oz, et la ligne de niveau **positif** k de la fonction $z \mapsto |z|$ correspond au cercle de centre O et de rayon k.

De façon tout à fait analogue, si M_0 est le point image du nombre complexe z_0, alors la représentation graphique dans l'espace $\mathbb{R}^3$ de la fonction $z \mapsto |z - z_0|$ est un cône de sommet M_0 et d'axe Oz, tandis que la ligne de niveau **positif** k de cette fonction est le cercle de centre M_0 et de rayon k.

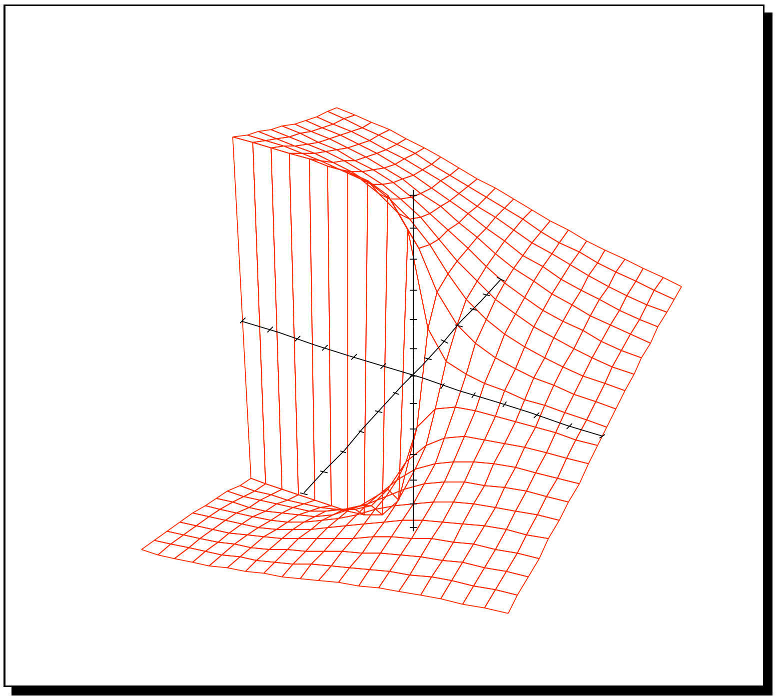


Lignes de niveaux 2 et 3 de la fonction $z \mapsto |z - z_0|$

Si le réel k est nul, la ligne de niveau k est réduite au point M_0, et si k est strictement négatif, la ligne de niveau est vide.

10.4 - Les fonctions $z \mapsto \text{Arg}(z)$ et $z \mapsto \text{Arg}(z - z_0)$

La représentation graphique de la fonction $z \mapsto \text{Arg}(z)$ est la surface $\mathcal{S}$ suivante :

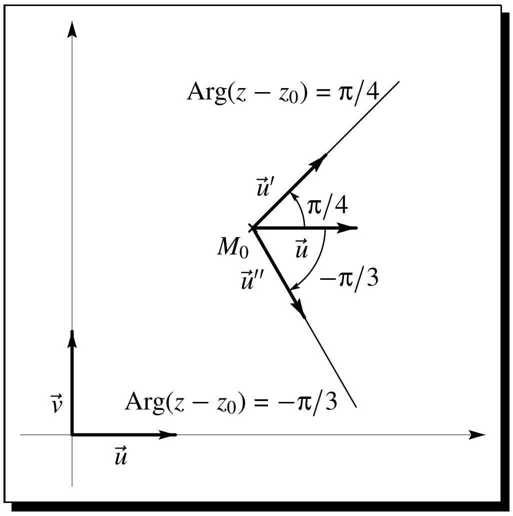


La fonction $z \mapsto \text{Arg}(z)$

Et si z_0 est un nombre complexe fixé, affixe du point M_0, la représentation graphique de la fonction $z \mapsto \text{Arg}(z - z_0)$ est l'image de la surface $\mathcal{S}$ par la translation de vecteur $\vec{w}$, où $\vec{w}$ est le vecteur image de z_0.

Dans ce cas, la ligne de niveau de la fonction $z \mapsto \text{Arg}(z - z_0)$ correspondant au niveau θ (au nombre de tours près) est la demi-droite d'extrémité M_0 (M_0 non compris puisque le nombre 0 n'a pas d'argument) et de vecteur directeur $\vec{u}'$ tel qu'une mesure de l'angle orienté $(\widehat{\vec{u}, \vec{u}'})$ soit θ.

Par exemple, voici les lignes de niveaux $\pi/4$ et $-\pi/3$ de la fonction $z \mapsto \operatorname{Arg}(z - z_0)$ où z_0 est un nombre complexe fixé :



Lignes de niveaux $\frac{\pi}{4}$ et $-\frac{\pi}{3}$ de la fonction $z \mapsto \operatorname{Arg}(z - z_0)$

11. Fonctions de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$, transformations

Pour représenter une fonctions de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$, il faut 4 dimensions : 2 pour l'espace de départ et 2 pour l'espace d'arrivée. On se contente donc, à notre niveau, d'imaginer ces fonctions en cherchant les images de certains points ou ensembles de points particuliers. . .

11.1 - Translations ($z \mapsto z + b$)

On considère f l'application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par $z \mapsto z + b$ où b est un nombre complexe quelconque.

Soit M l'image de z et M' l'image de $z' = f(z)$ dans le plan complexe.

Alors l'application $M \mapsto M'$ ainsi définie est la translation de vecteur $\vec{w}$, où $\vec{w}$ est le vecteur image de b. On note $T_{\vec{w}}$ cette application.

Même si c'est trivial, il faut noter que les translations conservent les distances et les angles. Autrement dit si les points A', B' et C' sont les images respectives des points A, B et C par une translation t, alors

$$AB = A'B' \qquad \text{et} \qquad (\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}) = (\widehat{\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'}})$$

11.2 - Rotations ($z \mapsto e^{i\theta} z$)

On considère f l'application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par $z \mapsto e^{i\theta} z$ où θ est un nombre réel quelconque.

Soit M l'image de z et M' l'image de $z' = f(z)$ dans le plan complexe.

Alors l'application $M \mapsto M'$ ainsi définie est la rotation de centre O (l'origine du repère) et d'angle θ. On note $R_{O,\theta}$ cette application.

Comme les translations, les rotations conservent les distances, les angles et le parallélisme.

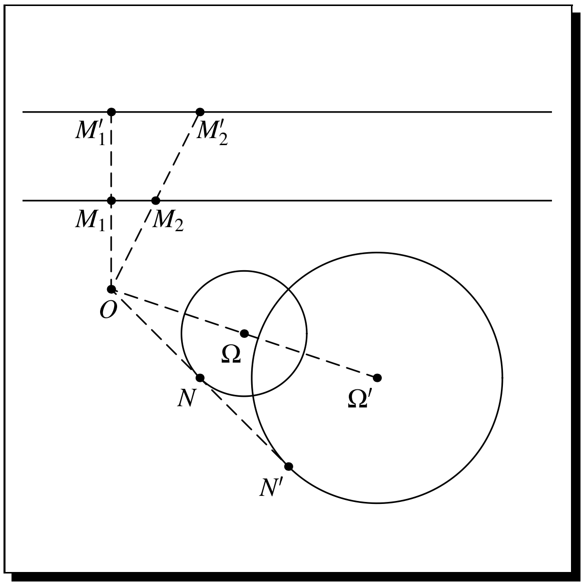
11.3 - Homothéties ($z \mapsto kz, k \in \mathbb{R}$)

On considère f l'application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par $z \mapsto kz$ où k est un nombre **réel** quelconque.

Soit M l'image de z et M' l'image de $z' = f(z)$ dans le plan complexe.

Alors l'application $M \mapsto M'$ ainsi définie est l'homothétie de centre O (l'origine du repère) et de rapport k. Autrement dit, M' est l'image du point M si et seulement si $\overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM}$. On note $H_{O,k}$ cette application.

Rappelons qu'une homothétie de rapport k conserve les angles et le parallélisme, multiplie les distances par $|k|$, transforme une droite en une droite parallèle, et transforme un cercle de rayon r en un cercle de rayon $|k| \times r$.



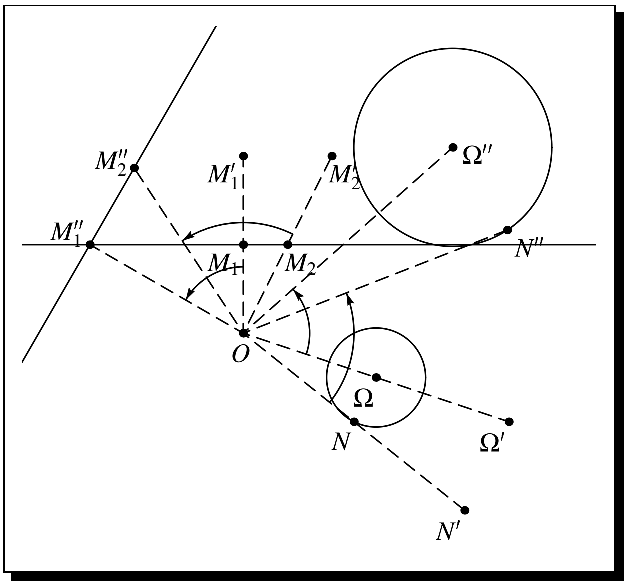
Images d'une droite et d'un cercle par l'homothétie $z \mapsto 2z$

11.4 - Similitudes ($z \mapsto az, a \in \mathbb{C}$)

On appelle *similitude* de centre O, de rapport k et d'angle θ la composée de l'homothétie de centre O et de rapport k avec la rotation de centre O et d'angle θ. On note $S_{O,\theta,k} = h_{O,k} \circ R_{O,\theta} = R_{O,\theta} \circ h_{O,k}$ (l'ordre de la composition n'a pas d'importance).

On considère f l'application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par $z \mapsto az$ où k est un nombre **complexe** quelconque. Pour chaque complexe z donné, on note M le point image de z, et M' l'image de $z' = f(z)$ dans le plan complexe.

Alors l'application $M \mapsto M'$ ainsi définie est la similitude de centre O (l'origine du repère), de rapport $\theta = \text{Arg}(a)$ et de rapport $k = |a|$.



Images d'une droite et d'un cercle par la similitude $z \mapsto 2e^{i\pi/3}z$

Une telle similitude conserve le parallélisme et les angles, mais multiplie les distances par $|k|$.

11.5 - Inversion ($z \mapsto \dfrac{1}{\overline{z}}$)

On appelle *inversion* de centre O et de puissance 1 l'application qui à tout point M, autre que O, associe le point M'

tel que :

- $OM \times OM' = 1$
- M' appartient à la demi-droite issue de O passant par M.

On considère f l'application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par $z \mapsto \dfrac{1}{\bar{z}}$, et on note M l'image de z et M' l'image de $z' = f(z)$ dans le plan complexe. Alors l'application $M \mapsto M'$ ainsi définie est l'inversion de centre O et de puissance 1.

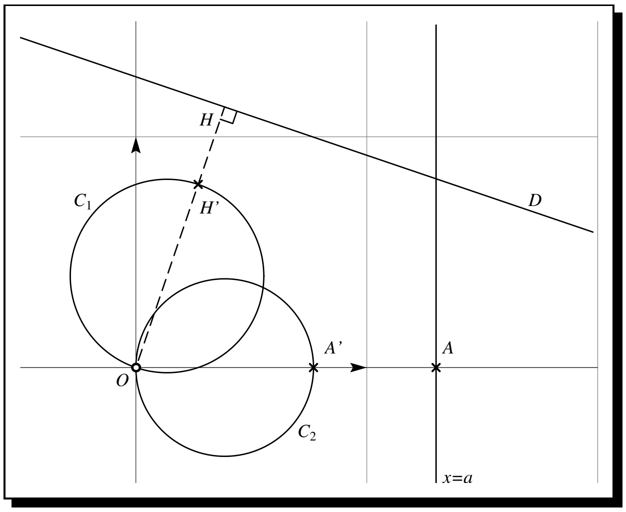
Pour construire l'image d'un point M d'affixe, on utilise le fait que si

$$z = [r, \theta] = re^{i\theta} \qquad \text{alors} \qquad \frac{1}{\bar{z}} = \left[\frac{1}{r}, \theta\right] = \frac{1}{r}e^{i\theta}.$$

Reste à savoir (et on l'admettra) que :

- L'image par l'inversion de centre O et de puissance 1 d'une droite ne passant pas par O est un cercle privé d'un point.
- L'image par l'inversion de centre O et de puissance 1 de la droite d'équation $x = a$ ($a \neq 0$) est le cercle de centre $\Omega(1/2a, 0)$, de rayon $1/2a$, privé du point O.

Ainsi, dans l'exemple ci-dessous on a tracé les cercles C_1 et C_2, images respectives des droites D et $x = a$ par l'inversion de centre O et de puissance 1.



Images de 2 droite par l'inversion de centre O de puissance 1

11.6 - Inversion complexe ($z \mapsto \dfrac{1}{z}$)

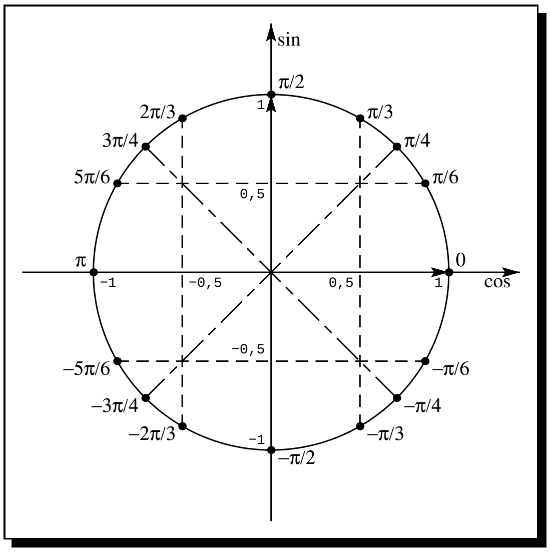
On considère f l'application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par $z \mapsto \dfrac{1}{z}$, et on note M l'image de z et M' l'image de $z' = f(z)$ dans le plan complexe. Alors l'application $M \mapsto M'$ ainsi définie est l'inversion de centre O et de puissance -1, parfois aussi appelé *inversion complexe*.

Pour construire l'image d'un point M d'affixe, on utilise le fait que si

$$z = [r, \theta] = re^{i\theta} \qquad \text{alors} \qquad \frac{1}{z} = \left[\frac{1}{r}, -\theta\right] = \frac{1}{r}e^{-i\theta}.$$

Géométriquement, la transformation ainsi définie est la composée de l'inversion de centre O et de puissance 1 avec la symétrie orthogonale d'axe Ox.

Nombres complexes : exercices



x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

Exercice 1 : Équation dans $\mathbb{C}$

Déterminer la solution complexe z_0 de l'équation

$$\frac{z+1}{z-1} = 1 + i.$$

Exercice 2 : Système d'équations dans $\mathbb{C}$

Déterminer les nombres complexes z_1 et z_2 tels que

$$\begin{cases} 2z_1 + z_2 = 4 \\ -2iz_1 + z_2 = 0 \end{cases}$$

Exercice 3 : Impédance complexe

On note j le nombre complexe de module 1 et d'argument $\pi/2$.

On donne le nombre complexe

$$\underline{\alpha} = \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1(\underline{Z}_2 + R) + \underline{Z}_2 R},$$

avec $R = 900$, $\underline{Z}_1 = 1\,100j$, $\underline{Z}_2 = -600j$.

Mettre le nombre complexe $\underline{\alpha}$ sous la forme algébrique $a + bj$.

Exercice 4 : Impédance complexe

On note j le nombre complexe de module 1 et d'argument $\pi/2$.

L'impédance complexe d'un circuit est telle que

$$\underline{Z} = \frac{\underline{Z}_1 \times \underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3},$$

avec $\underline{Z}_1 = 1 + 2j$, $\underline{Z}_2 = -1 + 3j$ et $\underline{Z}_3 = 4 + 5j$.

Mettre $\underline{Z}$ sous la forme algébrique $a + bj$.

Exercice 5 : Écriture sous forme trigonométrique

Déterminer les formes trigonométriques des nombres

$$z_1 = 3i, \qquad z_2 = -5, \qquad z_3 = 2 - 2i \qquad z_4 = 1 + i\sqrt{3}$$

Exercice 6 : Module et argument d'une puissance

On considère les nombres complexes :

$$z_1 = \sqrt{3} - i, \qquad z_2 = 2 - 2i, \qquad A = \frac{z_1^4}{z_2^3}$$

(où i désigne lme nombre complexe de module 1 et d'argument $\pi/2$).

1. *a*) Déterminer le module et un argument des nombres complexes z_1, z_2, z_1^4, z_2^3 et A.
   b) En déduire la forme algébrique des nombres complexes z_1^4, z_2^3 et A.
2. Déduire des questions précédentes les valeurs exactes de $\cos\dfrac{\pi}{12}$ et $\sin\dfrac{\pi}{12}$.
   Vérifier les résultats obtenus avec votre calculatrice.

Exercice 7 : Équation trigonométrique et linéarisation

Le but de cet exercice est la résolution dans l'intervalle $[0, 2\pi[$ de l''équation

$$2\sin x - \sin 3x = 0.$$

1. Soit x un nombre réel :
   a) Développer $(e^{ix} - e^{-ix})^3$ et montrer que
   $$(e^{ix} - e^{-ix})^3 = (e^{3ix} - e^{-3ix}) - 3(e^{ix} - e^{-ix}).$$
   b) Transformer l'égalité précédente à l'aide des formules d'Euler, et en déduire que :
   $$4\sin^3 x - \sin x = 2\sin x - \sin 3x.$$
2. Résoudre dans l'intervalle $[0, 2\pi[$ les équations suivantes :
   $$a)\ \sin x = 0, \qquad b)\ \sin x = \frac{1}{2}, \qquad c)\ \sin x = -\frac{1}{2}.$$
3. En déduire les solutions appartenant à l'intervalle $[0, 2\pi[$ de l'équation
   $$2\sin x - \sin 3x = 0.$$

Exercice 8 : Racine carrée dans $\mathbb{C}$

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$z^2 = 3 - 4i.$$

Exercice 9 : Èquation du second degré à coefficients dans $\mathbb{R}$

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation
   $$z^2 - 2\sqrt{2}z + 4 = 0.$$
2. Déterminer le module et un argument de chacune des solutions.

Exercice 10 : Èquation du second degré à coefficients dans $\mathbb{C}$

Calculer $(3 - 2i)^2$ puis résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$z^2 + z - 1 + 3i = 0.$$

Exercice 11 : Èquation du second degré à coefficients dans $\mathbb{C}$

Calculer $(5-3i)^2$ puis résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$z^2+(5-i)z+2+5i=0.$$

Exercice 12 : Équation du second degré dans $\mathbb{C}[X]$

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$z^2-(5+3i)z+10+5i=0.$$

Exercice 13 : Équation dans $\mathbb{C}[X]$ et triangle

On donne le polynôme de la variable complexe z :

$$P(z)=z^3-(7+3i)z^2+(16+15i)z+2-36i$$

où i désigne le nombre complexe de module 1 et d'argument $\pi/2$.

1. *a*) Calculer $P(2i)$.
   b) En déduire une factorisation de $P(z)$ en admettant que, dans $\mathbb{C}$ comme dans $\mathbb{R}$, si un polynôme s'annule pour $z=a$, alors il peut s'écrire sous la forme $(z-a)Q(z)$ où $Q(z)$ est un polynôme.
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z)=0$.
3. *a*) Placer dans le plan complexe les points A, B et C d'affixes respectives

$$z_1=2i, \qquad z_2=3-2i, \qquad \text{et} \qquad z_3=4+3i.$$

   b) Calculer la valeur exacte de la longueur de chaque côté du triangle ABC.

Exercice 14 : Linéarisation

Utiliser les formules d'Euler pour transformer en somme l'expression suivante :

$$f(x)=\sin(2x)\sin(3x)$$

Exercice 15 : Linéarisation

Linéariser l'expression $\sin^3(2x)$.

Exercice 16 : Ligne de niveau

Quel est l'ensemble des points M d'affixe z du plan vérifiant $|z-3|=2$?

Exercice 17 : Ligne de niveau

Quel est l'ensemble des points M d'affixe z du plan vérifiant $\operatorname{Arg}(z-(3-i))=\pi/3$?

Exercice 18 : Ligne de niveau

On désigne par j le nombre complexe de module 1 et d'argument $\pi/2$.
Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z du plan tels que

$$z=1-j\frac{L}{C\omega}$$

où L et C sont deux contantes réelles strictement positives et où ω est un réel variant dans l'intervalle $]0,+\infty[$.

Exercice 19 : Fonction de transfert en électronique

En électronique, on utilise la « fonction de transfert » $\underline{T}$ de la pulsation ω, définie quand ω décrit l'intervalle $[0,+\infty[$ par :

$$\underline{T}(\omega) = \frac{1}{1+j\omega}.$$

1. Montrer que pour tout nombre réel ω de $[0,+\infty[$, on a :

$$\underline{T}(\omega) = \frac{1-j\omega}{1+\omega^2}.$$

2. Le plan complexe est muni du repère orthonormal $(O,\vec{u},\vec{v})$, unité 20 cm (ou 20 grands carreaux). Placer les points A, B, C, D, E et F d'affixes respectives

$$\underline{T}(0), \qquad \underline{T}(0,3), \qquad \underline{T}(0,5), \qquad \underline{T}(1), \qquad \underline{T}(2), \qquad \underline{T}(3).$$

3. Montrer que, pour tout nombre réel ω de $[0,+\infty[$, le point M d'affixe $\underline{T}(\omega)$ est situé sur le demi-cercle inférieur de diamètre $[OA]$.
4. Quel est l'ensemble des points m d'affixe $1-j\omega$ quand ω varie dans $[0,+\infty[$?

Exercice 20 : Fonction de transfert en électronique

En électronique, sur un montage, on utilise la « fonction de transfert » $\underline{T}$ de la pulsation ω, définie quand ω décrit l'intervalle $[0,+\infty[$ par :

$$\underline{T}(\omega) = \frac{4}{(1+j\omega)^3}.$$

1. Calculer

$$\underline{T}(0), \qquad \underline{T}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right), \qquad \underline{T}(1), \qquad \underline{T}(\sqrt{3}).$$

2. On modifie le montage précédent et on obtient alors la « nouvelle fonction de transfert » $\underline{H}$ définie par :

$$\underline{H}(\omega) = \frac{\underline{T}(\omega)}{1+\underline{T}(\omega)}$$

Calculer les modules et argument de $\underline{H}(0)$, $\underline{H}(1)$ et $\underline{H}(\sqrt{3})$.

3. Le plan complexe est muni du repère orthonormal $(O,\vec{u},\vec{v})$. Soit A le point d'affixe -1 et M le point d'affixe $\underline{T}(\omega)$.
   a) Montrer que le module de $\underline{H}(\omega)$ est égal à MO/MA.
   b) Montrer qu'un argument de $\underline{H}(\omega)$ est égal à l'angle $(\widehat{\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MO}})$.
   c) Utiliser *a*) et *b*) pour retrouver les résultats du **2.**

Exercice 21 : Une fonction de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$, interprétation géométrique

À tout nombre complexe z, on associe le nombre complexe Z défini par

$$Z = z^2 - z + 2$$

(on définit ainsi une fonction de $\mathbb{C}$ vers $\mathbb{C}$). On appelle respectivement M et M' les images de z et Z dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{u},\vec{v})$.

1. *a*) Si M a pour affixe $z = -2+i$, quel est l'affixe du point M' ?
   b) Si le point M' a pour affixe $Z = 1$, quels sont les affixes des points M qui ont M' pour associé ?
2. *a*) On pose $z = x+iy$ où x et y sont des nombres réels. Exprimer en fonction de x et y les parties réelles et imaginaires X et Y de Z.
   b) Quels sont les points M du plan pour lesquels M' appartient à la droite de vecteur directeur $\vec{u}$ passant par O ?

Exercice 22 : Fonction de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ – Ensembles de points

On pose $z = x + iy$ où x et y sont des nombres réels, et on appelle M l'image de z dans le plan complexe.
À tout nombre complexe $z \neq -i$, on associe le nombre complexe

$$Z = \frac{z + 2i}{1 - iz}.$$

1. Déterminer, en fonction de x et y, la partie réelle et la partie imaginaire de Z.
2. Quel est l'ensemble E des points tels que Z soit imaginaire pur ? Tracer E.
3. *a*) Déterminer une relation entre x et y afin que Z soit réel. Démontrer que cette relation s'écrit qussi sous la forme

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = \frac{1}{4},$$

où a et b sont des réels que l'on déterminera.

b) Quel est l'ensemble F des points M correspondant ? Tracer F.