Brevet de Technicien Supérieur, session 2006

Exercice 1 : (*11 points*) **Équation différentielle, étude de fonction,** *bts mai, session 2006*

A

1. L'équation caractéristique associée à (E_0) est : $r^2 - 3r - 4 = 0$, de discriminant $\Delta = 25$, d'où les 2 racines $x_1 = 4$ et $x_2 = -1$. D'où la $\boxed{\text{solution générale de } (E_0) : y_0 = Ae^{4x} + Be^{-x}, A, B \in \mathbb{R}}$.
2. On a
$$h(x) = xe^{-x}, \qquad h'(x) = (1-x)e^{-x}, \qquad \text{et} \qquad h''(x) = (x-2)e^{-x}$$
d'où
$$\begin{aligned} h'' - 3h' - 4h &= \big((x-2) - 3(1-x) - 4x\big)e^{-x} \\ &= -5e^{-x} \end{aligned}$$
ce qui prouve que $\boxed{h(x) = xe^{-x} \text{ est solution particulière de } (E)}$.
3. Donc $\boxed{\text{la solution générale de } (E) \text{ est } y(x) = xe^{-x} + Ae^{4x} + Be^{-x}, A, B \in \mathbb{R}}$
4. En partant du résultat ci-dessus, on obtient
$$y'(x) = (1-x)e^{-x} + 4Ae^{4x} - Be^{-x}.$$
Les conditions initiales nous imposent alors le système
$$\begin{cases} f(0) = 2 \\ f'(0) = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A + B = 2 \\ 1 + 4A - B = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} (1) \\ (2) \end{matrix} \begin{cases} A + B = 2 \\ 4A - B = -2 \end{cases} \overset{(1)+(2)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} 5A = 0 \\ 4A - B = -2 \end{cases}$$
d'où l'on tire $(A, B) = (0, 2)$, d'où la $\boxed{\text{solution particulière cherchée : } f(x) = (x+2)e^{-x}}$.

B

1. En utilisant le formulaire, il vient
$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + x^3\varepsilon(x) \qquad \text{avec} \qquad \lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0.$$
Multiplions maintenant cette égalité par $(x+2)$, on obtient
$$\begin{aligned} (x-2)e^{-x} &= (x+2)\left(1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right) + x^3\varepsilon(x) \qquad \text{avec} \qquad \lim_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0 \\ &= x - x^2 + \frac{x^3}{2} + 2 - 2x + x^2 - \frac{x^3}{3} + x^3\varepsilon(x) \qquad \text{avec} \qquad \lim_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0 \\ &= \boxed{f(x) = 2 - x + \frac{x^3}{6} + x^3\varepsilon(x) \qquad \text{avec} \qquad \lim_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0} \end{aligned}$$
2. L'équation de la tangente cherchée est le développement limité d'ordre 1 en 0 de $f(x)$. D'où l'équation cherchée : $\boxed{T\ : y = 2 - x}$.
3. Étudier la position relative de C et T revient à étudier le signe de la différence $f(x) - T(x)$. Comme l'étude se fait au voisinage de 0, on peut utiliser le développement limité précédent. D'où
$$f(x) - T(x) = \frac{x^3}{6} + x^3\varepsilon(x) \qquad \text{avec} \qquad \lim_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0$$
Cette différence est du signe de x^3, et on conclue aisément :

x		0	
$f(x) - T(x)$	$-$	0	$+$
positions relatives	C_f au dessous de T		C_f au dessus de T

C

1. À calculer l'intégrale

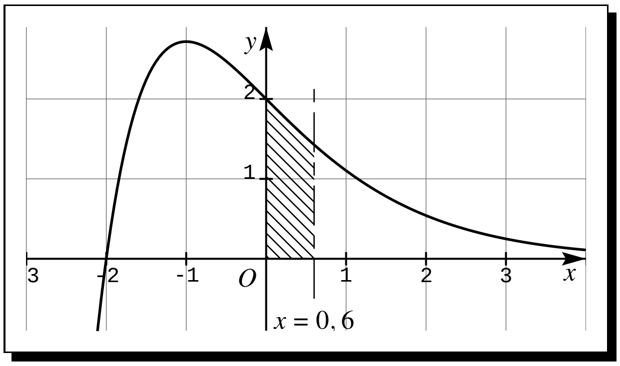
$$I = \int_0^{0,6} \underbrace{(x+2)}_{U}\underbrace{e^{-x}}_{V'}\,dx \qquad \text{avec} \qquad \begin{cases} U' = 1 \\ V = -e^{-x} \end{cases}$$

Il vient alors

$$\begin{aligned} I &= \Big[-(x+2)e^{-x}\Big]_0^{0,6} - \int_0^{0,6} -e^{-x}\,dx \\ &= \Big(-2,6e^{-0,6}+2\Big) - \Big[e^{-x}\Big]_0^{0,6} \\ &= \Big(-2,6e^{-0,6}+2\Big) - \Big(e^{-0,6}-1\Big) \qquad \text{soit} \qquad \boxed{I = 3 - 3,6e^{-0,6}}. \end{aligned}$$

2. Il vient $\boxed{I \approx 1,024}$

3. Ce nombre représente l'aire, en unité d'aire, du domaine plan limité par la courbe de f, l'axe Ox, l'axe Oy et la droite verticale $x = 0,6$ (aire hachurée sur le dessin ci-dessous).



Exercice 2 : (*9 points*) **Des chaudières...** *bts mai, session 2006*

A

1. À la calculatrice, on trouve comme coefficient de corrélation linéaire $r \approx 0,9837$, soit $\boxed{r \approx 0,98}$, et comme équation de la droite de régression de y en x : $\boxed{y = 0,406x + 15}$.
2. En utilisant l'équation de la droite de régression avec $x = 7$, on estime le nombre de chaudières fabriquées l'année de rang 7 à $\boxed{y = 18}$.

B Notons A l'événement « *la chaudière est à cheminée* »et D l'événement « *la chaudière est défectueuse* ». Le tableau ci-dessous résume la situation mensuelle :

	A	$\overline{A}$	total
D	**9**	**30**	39
$\overline{D}$	891	570	1 461
total	**900**	**600**	1 500

$0,01 \times 900 = 9$

$0,05 \times 600 = 30$

1. Les tirages étant équiprobables, on utilise la propriété

$$\text{probabilité} = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}$$

On obtient alors

$$\boxed{p(A) = \frac{900}{1500} = \frac{3}{5} = 0,6} \qquad \boxed{p(B) = \frac{600}{1500} = \frac{2}{5} = 0,4} \qquad \boxed{p(D|A) = \frac{9}{900} = 0,01}$$

$$\boxed{p(B|D) = \frac{30}{39} = \frac{10}{13} = 0,769}$$

2. De la même manière, on obtient :

$$\boxed{p(D \cap A) = \frac{9}{1500} = \frac{3}{500} = 0,006} \qquad \text{et} \qquad \boxed{p(D \cap B) = \frac{30}{1500} = \frac{1}{50} = 0,02}$$

3. Et enfin :

$$\boxed{p(D) = \frac{39}{1500} = \frac{13}{500} = 0,026} \qquad \text{et} \qquad \boxed{p(\overline{D}) = \frac{1\,461}{1500} = 0,974}$$

C La variable aléatoire X suit une loi normale $\mathcal{N}(15;3)$, donc la variable aléatoire $T = (X-15)/3$ suit une loi normale $\mathcal{N}(0;1)$. Il vient alors :

$$p(X \geqslant 10) = p\left(\frac{X-15}{3} \geqslant \frac{10-15}{3}\right) = p\left(T \geqslant -\frac{5}{3}\right) = 1 - \Pi\left(-\frac{5}{3}\right)$$
$$= \Pi\left(\frac{5}{3}\right) \qquad \text{soit} \qquad \boxed{p(X \geqslant 10) \approx 0,953}$$

D

1. On a immédiatement, comme estimation ponctuelle de la fréquence p : $\boxed{f = 0,94}$.

2. On utilise la formule vue en cours avec le coefficient $t = 1,96$, car

$$2\Pi(t) - 1 = 0,95 \iff \Pi(t) = \frac{1,95}{2} = 0,975 \iff t = 1,96.$$

D'où l'intervalle de confiance à 95% :

$$I = \left[0,94 - 1,96\sqrt{\frac{0,94 \times 0,06}{99}}; 0,94 + 1,96\sqrt{\frac{0,94 \times 0,06}{99}}\right] = \left[0,916\,1; 0,963\,8\right]$$
$$\text{soit} \qquad \boxed{I = \left[0,92; 0,97\right]}$$

3. Évidemment, la réponse est $\boxed{\text{non}}$: on ne peut garantir que la fréquence inconnue p est dans l'intervalle I ci-dessus, puisque que le coefficient de confiance n'est pas de 100%.