Brevet de Technicien Supérieur, session 2004

Exercice 1 : (*9 points*) **Des tiges métalliques**. . . , *bts mai, session 2004*

A

1. La variable aléatoire X suit une loi normale $\mathcal{N}(100; 0,25)$, donc la variable aléatoire $T = (X - 100)/0,25$ suit une loi normale $\mathcal{N}(0; 1)$. Il vient alors

$$\begin{aligned} p(99,45 \leqslant X \leqslant 100,55) &= p\left(\frac{99,45 - 100}{0,25} \leqslant \frac{X - 100}{0,25} \leqslant \frac{100,55 - 100}{0,25}\right) \\ &= p(-2,2 \leqslant T \leqslant 2,2) \\ &= 2\Pi(2,2) - 1 = 2 \times 0,9861 - 1 \qquad \text{soit} \qquad \boxed{p(99,45 \leqslant X \leqslant 100,55) = 0,972} \end{aligned}$$

2. Il vient

$$p(100 - h \leqslant X \leqslant 100 + h) = 0,95$$

$$\iff \quad p\left(\frac{100 - h - 100}{0,25} \leqslant \frac{X - 100}{0,25} \leqslant \frac{100 + h - 100}{0,25}\right) = 0,95$$

$$\iff \quad p\left(-\frac{h}{0,25} \leqslant T \leqslant \frac{h}{0,25}\right) = 0,95$$

$$\iff \quad 2\Pi\left(\frac{h}{0,25}\right) - 1 = 0,95 \quad \iff \quad \Pi\left(\frac{h}{0,25}\right) = \frac{1,95}{2} = 0,975$$

Par lecture inverse de la table de la loi normale, on en déduit

$$\frac{h}{0,25} = 1,96 \qquad \text{soit} \qquad \boxed{h = 0,49} \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{p(99,51 \leqslant X \leqslant 100,49) = 0,95}$$

Autrement dit, il y a

$\boxed{\text{95\% de chance que la longueur d'une tige prélevée au hasard soit comprise entre } 99,51 \text{ et } 100,49 \text{ mm}}$

B

1. Nous avons **50 expériences indépendantes**, chacune de ces expériences n'ayant que **2 issues possibles** (conforme ou non). La variable Y compte les tiges non conformes ($p = 0,03$). Donc $\boxed{Y \text{ suit une loi } \mathcal{B}(50; 0,03)}$.

2. Il vient

$$\begin{aligned} p(Y \leqslant 2) &= p(Y = 0) + p(Y = 1) + p(Y = 2) \\ &= C_{50}^{0} \times 0,03^{0} \times 0,97^{50} + C_{49}^{1} \times 0,03^{1} \times 0,97^{49} + C_{48}^{2} \times 0,03^{2} \times 0,97^{48} \\ &\approx 0,218 + 0,330 + 0,235 \qquad \text{soit} \qquad \boxed{p(Y \leqslant 2) = 0,784} \end{aligned}$$

3. Le paramètre de la loi de Poisson est $\boxed{\lambda = 50 \times 0,03 = 1,5}$ puisque l'on approche cette loi binomiale par une loi de Poisson ayant la même espérance.

4. Selon le formulaire, on a $\boxed{p(Z = 2) = 0,251}$, et $p(Z \leqslant 2) = 0,223 + 0,335 + 0,251$, soit $\boxed{p(Z \leqslant 2) = 0,809}$.

C

1. Une estimation ponctuelle de μ est $\boxed{m = 9,99}$.

2. On utilise la formule du cours pour l'intervalle de confiance. Le coefficient de confiance étant de 0,95, il vient

$$2\Pi(t) - 1 = 0,95 \quad \iff \quad \Pi(t) = 0,975 \quad \iff \quad t = 1,96.$$

D'où l'intervalle cherché :

$$\left[9,99 - 1,96 \times \frac{0,19}{\sqrt{50}}; 9,99 + 1,96 \times \frac{0,19}{\sqrt{50}}\right] \qquad \text{soit} \qquad \boxed{[0,937; 10,0242]}$$

3. L'affirmation proposée est $\boxed{\text{évidemment fausse}}$.

Exercice 2 : (*11 points*) **Hauteurs de crues et probabilités,** *bts mai, session 2004*

A **1.** Il vient

$$y' + (0,4x)y = 0 \iff y' = -0,4xy.$$

Ici, $a(x) = -0,4x$, et une primitive est $A(x) = -0,2x^2$. La solution générale de E_0 est donc $\boxed{y_0(x) = ke^{-0,2x^2}, k \in \mathbb{R}}$.

2. Si $h(x) = 1$, alors $h'(x) = 0$, et il est évident que $h' + 0,4xh = 0,4x$, donc $\boxed{h(x) = 1 \text{ est solution particulière de } (E)}$

3. La solution générale de (E) est donc $\boxed{1 + ke^{-0,2x}, k \in \mathbb{R}}$.

4. La fonction $F(x) = 1 - e^{-0,2x^2}$ est bien une $\boxed{\text{solution de } (E)}$ puisque de la forme donnée dans le **3.** avec $k = -1$. De plus il est facile de vérifier que l'on a bien $\boxed{F(0) = 0}$.

B **1.** *a*) La limite donnée prouve une $\boxed{\text{asymptote horizontale d'équation } y = 0}$ pour la courbe C.

2. Il vient $f'(x) = 0,4e^{-0,2x^2} - 0,16x^2e^{-0,2x^2} = 0,4(1-0,04x^2)e^{-0,2x^2}$. Et comme $(1-x\sqrt{0,4})(1+x\sqrt{0,4}) = (1-0,4x)$, on a bien l'expression proposée : $\boxed{f'(x) = 0,4\left(1-\sqrt{0,4}x\right)\left(1+\sqrt{0,4}x\right)e^{-0,2x^2}}$, d'où le tableau de variation de f :

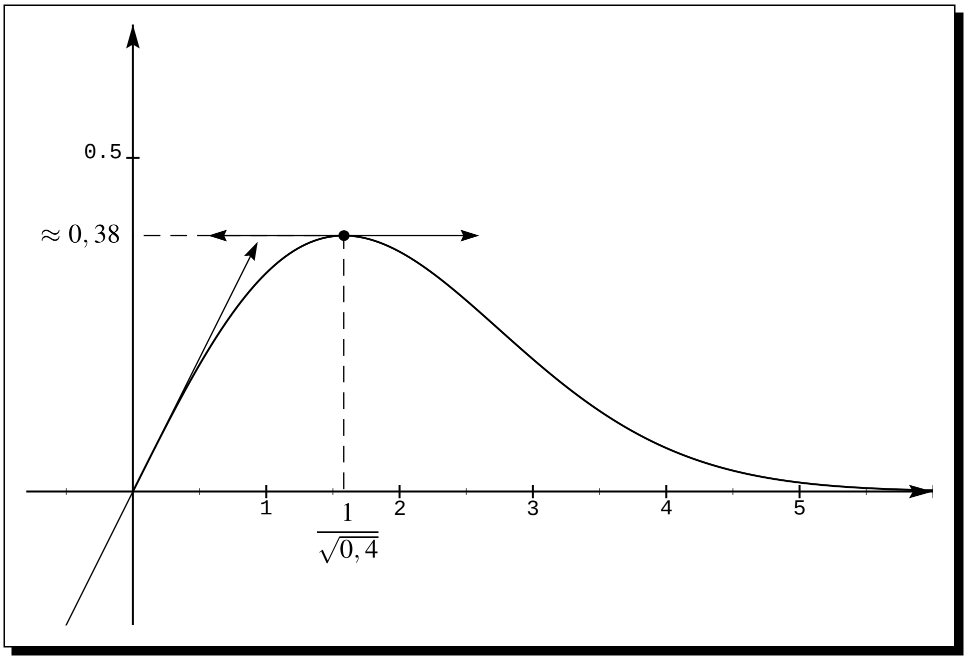
x	0		$1/\sqrt{0,4}$		$+\infty$
$0,4x$		$+$		$+$	
$1+x\sqrt{0,4}$		$+$		$+$	
$1-x\sqrt{0,4}$		$+$	0	$-$	
$e^{-0,2x^2}$		$+$		$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\approx 0,38$	$\searrow$	0

3. Pour l'équation de la tangente en 0, il suffit de prendre le développement limité d'ordre 1. D'où l'équation cherchée : $\boxed{y = 0,4x}$.

Pour les positions relatives, il nous faut étudier le signe de la différence entre $f(x)$ et la tangente. Comme, au voisinage de 0, cette différence est égale à $-0,08x^3$, on a facilement le tableau récapitulatif suivant :

x		0	
$-0,08x^3$	$+$	0	$-$
$f(x) - T$	$+$	0	$-$
positions relatives	C_f au dessus de T		C_f au dessous de T

4.



D **1.** Il vient $\boxed{p(X \leqslant 4) = 1 - e^{-0,2\times 4^2} \approx 0,96}$

2. *a*) On a

$$p(X \leqslant x_0) = 0,99 \iff 1 - e^{-0,2\times x_0^2} = 0,99 \iff \boxed{e^{-0,2\times x_0^2} = 1 - 0,99 = 0,01}$$

b) D'où $-0,2x_0^2 = \ln(0,01)$, soit $\boxed{x_0 = \sqrt{-\dfrac{\ln 0,01}{0,2}} \approx 4,80}$

c) L'affirmation proposée est $\boxed{\text{vraie}}$, puisque en surélevant la digue d'un mètre, l'agglomération sera protégée jusqu'à 5 mètres de crue, valeur supérieure au x_0 précédemment calculé.