Devoir surveillé n° 4

durée : 2h

Exercice 1 : (*11,5 points*) **Étude d'une fonction rationnelle**

– Partie A –

Soit C la courbe d'équation $y = a + \dfrac{2x+b}{x^2+2}$ où a et b sont des constantes réelles.

Déterminer les nombres réels a et b sachant que la courbe C passe par les points $A(-1;0)$ et $B\left(2;\dfrac{3}{2}\right)$.

– Partie B –

On considère la fonction f définie pour tout x de $[-6;6]$ par

$$f(x) = \frac{x^2+2x+1}{x^2+2}$$

et on note C_f sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O,\vec{u},\vec{v})$.

1. On note Δ la droite d'équation $y = 1$.

a) Déterminer les coordonnées du point d'intersection de C_f et Δ.

b) Étudier le signe de $f(x) - 1$. En déduire les positions relatives de C_f et Δ.

2. *a*) Reproduire puis compléter le tableau de valeurs ci-dessous (on donnera des valeurs à 10^{-2}) près :

x	-6	-4	-2	-1	0	1	2	4	6
$f(x)$									

b) Ces résultat numériques sont-ils cohérents avec votre réponse du **1.***b*) ? (Justifier.)

3. Calculer f', la fonction dérivée de f, et montrer que l'on a

$$f'(x) = \frac{2\times\left(-x^2+x+2\right)}{\left(x^2+2\right)^2}$$

4. *a*) Étudier, suivant les valeurs de x, le signe de la fonction dérivée $f'(x)$.

b) En déduire le tableau de variation de f sur l'intervalle $[-6\,;6]$.

5. Déterminer une équation de T, la tangente à la courbe C_f au point d'abscisse 0.

6. Représenter, sur l'intervalle $[-6\,;6]$, la courbe C_f, la tangente T et la droite Δ. (unités graphiques : 1 cm ou 1 grand carreau sur Ox, et 3 cm ou 3 grand carreaux sur Oy.)

Exercice 2 : (*8,5 points*) **Complexes et géométrie**

1. On considère les nombres complexes z_A, z_B et z_C définis par

$$z_A = 2\sqrt{3}+2i \qquad z_B = \left[4;-\frac{5\pi}{6}\right] \qquad z_C = -4i.$$

a) Déterminer le module et un un argument de z_A.

b) Déterminer la forme algébrique de z_B.

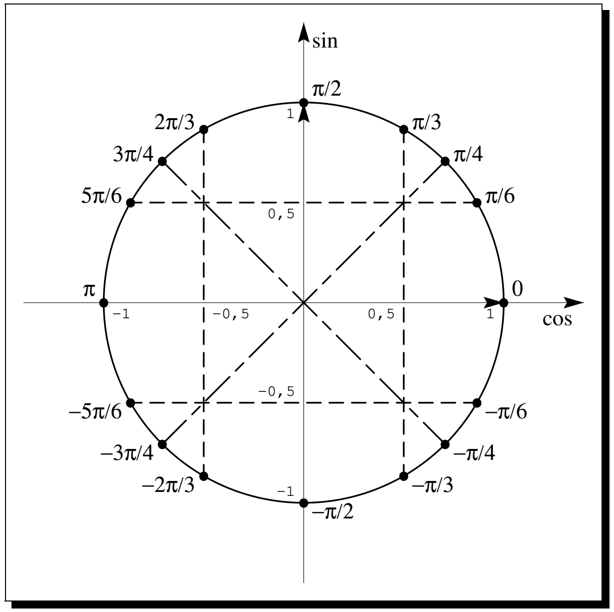
c) Déterminer le module et un un argument de z_C.

2. Dans le plan rapporté à un repère orthonormal $(O,\vec{u},\vec{v})$ d'unité graphique 2 cm (ou 2 grands carreaux), placer les points A, B et C d'affixes respectives z_A, z_B, z_C.

3. Montrer que les points A, B et C sont situés sur un même cercle de centre O dont on précisera le rayon.

4. Montrer que l'on a

$$|z_B - z_A| = 8.$$



x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1