Corrigé du devoir surveillé n° 6

durée : 1h30

Exercice 1 : (*6 points*) **Constructions à partir de l'égalité vectorielle**

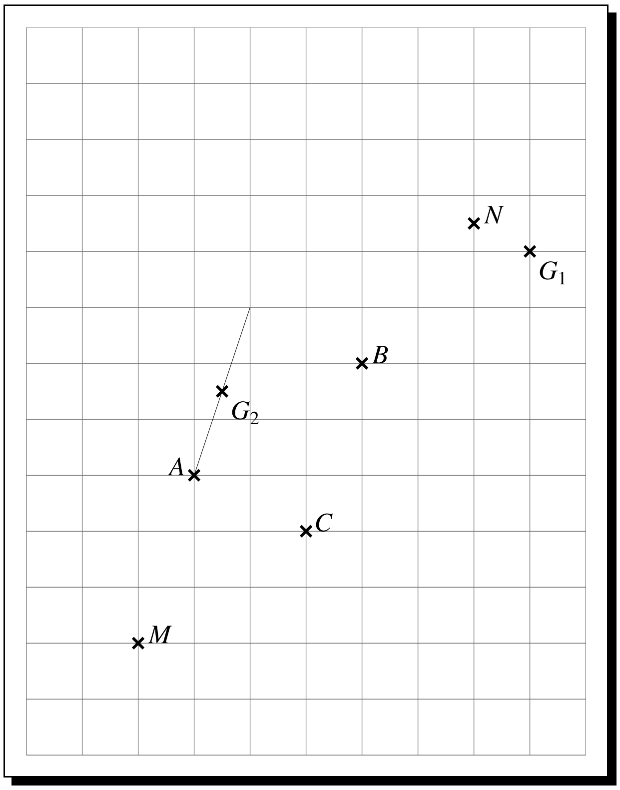
• Il vient

$$-\overrightarrow{G_1A}+2\overrightarrow{G_1B}=\overrightarrow{0} \iff -\overrightarrow{G_1A}+2\left(\overrightarrow{G_1A}+\overrightarrow{AB}\right)=\overrightarrow{0} \iff \boxed{2\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AG_1}}$$

• Il vient

$$-2\overrightarrow{G_2A}-\overrightarrow{G_2B}+\overrightarrow{G_2C}=\overrightarrow{0} \iff -2\overrightarrow{G_2A}-\left(\overrightarrow{G_2A}+\overrightarrow{AB}\right)+\overrightarrow{G_2A}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{0} \iff -\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=-2\overrightarrow{AG_2}$$

$$\text{soit} \qquad \boxed{\overrightarrow{AG_2}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}}$$



Exercice 2 : (*1,5 points*) **Barycentre et coordonnées**

En appliquant la formule du cours, on a immédiatement :

$$(x_G;y_G)=\left(\frac{3\times(-1)+2\times 3}{3+2};\frac{3\times 2+2\times 1}{3+2}\right) \qquad \text{soit} \qquad \boxed{(x_G;y_G)=\left(\frac{3}{5};\frac{8}{5}\right)}$$

Exercice 3 : (*1,5 points*) **Les poids sont à déterminer**

Si G est le barycentre du système $\{(A,\alpha),(B,\beta)\}$, alors

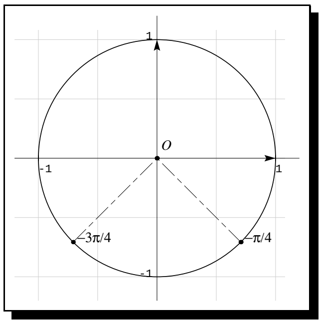
$$\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}=\vec{0}.$$

En partant de la relation donnée dans le texte, il vient alors :

$$2\overrightarrow{GB}-3\overrightarrow{AB}=\vec{0} \iff 2\overrightarrow{GB}-3\overrightarrow{AG}-3\overrightarrow{GB}=\vec{0} \iff 3\overrightarrow{GA}-\overrightarrow{GB}=\vec{0}$$

Par identification, on trouve alors $\boxed{(\alpha,\beta)=(3,-1)}$.

Exercice 4 : (*2 points*) Une équation trigonométrique simple

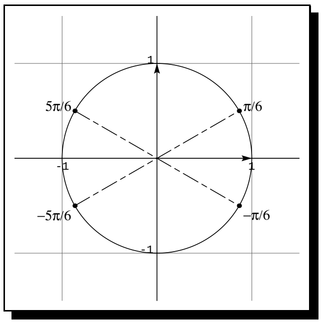


a) On a

$$\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\left\{\begin{array}{l} x = -\pi/4 + 2k\pi \\ \quad \text{ou} \\ x = -3\pi/4 + 2k\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}}$$

b) Dans l'intervalle $[0, 2\pi]$, les solutions sont donc $\boxed{\frac{5\pi}{4} \text{ et } \frac{7\pi}{4}}$.

Exercice 5 : (*2 points*) Une équation trigonométrique un peu moins simple



a) On a $\cos 2x = 1/2$ si et seulement si

$$\left\{\begin{array}{l} 2x = \pi/3 + 2k\pi \\ \quad \text{ou} \\ 2x = -\pi/3 + 2k\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\left\{\begin{array}{l} x = \pi/6 + k\pi \\ \quad \text{ou} \\ x = -\pi/6 + k\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}}$$

b) Dans l'intervalle $[0, 2\pi]$, les solutions sont donc $\boxed{\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \text{ et } \frac{11\pi}{6}}$.

Exercice 6 : (*3 points*) Une dernière équation trigonométrique

a) On a

$$\cos(2x + \pi) = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} 2x + \pi = \pi/6 + 2k\pi \\ \quad \text{ou} \\ 2x + \pi = -\pi/6 + 2k\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z} \quad \Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} 2x = -5\pi/6 + 2k\pi \\ \quad \text{ou} \\ 2x = -7\pi/6 + 2k\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}$$

$$\boxed{\left\{\begin{array}{l} x = -5\pi/12 + k\pi \\ \quad \text{ou} \\ x = -7\pi/12 + k\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}}$$

Il y a donc $\boxed{\text{quatres points solutions}}$ sur le cercle trigonométrique (2 pour $-5\pi/12 + k\pi$ et 2 autres pour $-7\pi/12 + k\pi$).

b) Dans l'intervalle $[0, 2\pi]$, les solutions sont donc $\boxed{\frac{7\pi}{12}, \frac{19\pi}{12}, \frac{5\pi}{12} \text{ et } \frac{17\pi}{12}}$.

---

w

Exercice 7 : (*3 points*) Transformation d'écriture – Équation

1. Développons l'expression proposée. Il vient :

$$f(x) = 2\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 2\left(\cos x \cos\frac{\pi}{3} - \sin x \sin\frac{\pi}{3}\right) = 2\left(\cos x \times \frac{1}{2} - \sin x \times \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

On a donc bien $\boxed{f(x) = 2\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right).}$

2. Il vient

$$\cos(x) - \sqrt{3}\sin(x) = -1 \iff f(x) = -1 \iff \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$$

D'où le système

$$\left\{\begin{array}{l} x + \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \\ \text{ou} \\ x + \frac{\pi}{3} = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi \end{array}\right. k \in \mathbb{Z} \iff \boxed{\left\{\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \\ \text{ou} \\ x = -\pi + 2k\pi \end{array}\right. k \in \mathbb{Z}}$$

Exercice 8 : (*1 points*) Détermination de constantes

La lecture des 2 hypothèses du texte nous donne un système de 2 équations à 2 inconnues qu'il nous suffit de résoudre :

$$\left\{\begin{array}{l} f(0) = -1 \\ f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} A\cos(0) + B\sin(0) = -1 \\ A\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + B\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} A = -1 \\ B = 1 \end{array}\right.$$

d'où l'expression $\boxed{f(x) = -\cos + \sin x}$
