Exercice 2 : (*8,5 points*) **Complexes et géométrie**

1. *a*) Il vient

$$|z_A| = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + 2^2} = 4 \qquad \text{et} \qquad \begin{cases} \cos\theta_A = 2\sqrt{3}/4 = \sqrt{3}/2 \\ \sin\theta_A = 1/2 \end{cases} \implies \theta_A = \frac{5\pi}{6} \quad \text{convient}$$

d'où $\boxed{z_A = \left[4; \frac{5\pi}{6}\right]}$

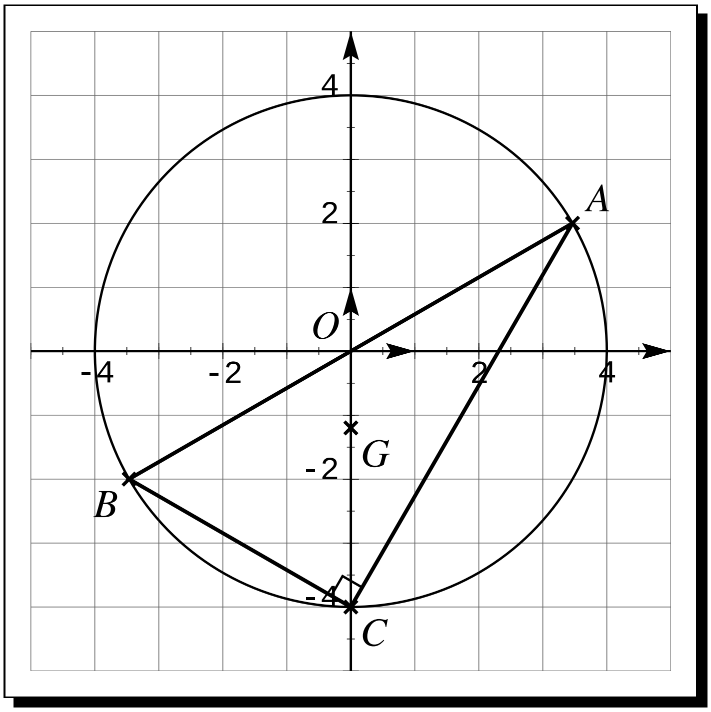
b) Il vient

$$z_B = 4\left(\cos\frac{-5\pi}{6} + i\sin\frac{-5\pi}{6}\right) = 4\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right) \qquad \text{soit} \qquad \boxed{z_B = -2\sqrt{3} - 2i}$$

c) Il vient

$$|z_C| = \sqrt{(-4)^2} = 4 \qquad \text{et} \qquad \begin{cases} \cos\theta_C = 0 \\ \sin\theta_C = -1 \end{cases} \implies \theta_C = -\frac{\pi}{2} \quad \text{convient} \qquad \text{et} \qquad \boxed{z_C = \left[4; -\frac{\pi}{2}\right]}$$

2.



3. On sait, d'après les questions précédentes, que

$$|z_A| = 4, \qquad |z_B| = 4, \qquad \text{et} \qquad |z_C| = 4, \qquad \text{autrement dit,} \qquad OA = OB = OC = 4$$

ce qui prouve que les points A, B et C sont $\boxed{\text{sur un même cercle de centre } O \text{ et de rayon } 4}$.

4. Il vient

$$\begin{aligned} |z_B - z_A| &= \left|-2\sqrt{3} - 2i - \left(2\sqrt{3} + 2i\right)\right| \\ &= \left|-4\sqrt{3} - 4i\right| \\ &= \sqrt{(-4\sqrt{3})^2 + (-4)^2} = \sqrt{48 + 16} \qquad \text{soit} \qquad \boxed{|z_B - z_A| = 8}. \end{aligned}$$

Exercice 2 : (*8,5 points*) **Complexes et géométrie**

1. *a*) Il vient

$$|z_A| = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + 2^2} = 4 \quad \text{et} \quad \begin{cases} \cos\theta_A = 2\sqrt{3}/4 = \sqrt{3}/2 \\ \sin\theta_A = 1/2 \end{cases} \Longrightarrow \quad \theta_A = \frac{5\pi}{6} \quad \text{convient}$$

d'où $\boxed{z_A = \left[4; \frac{5\pi}{6}\right]}$

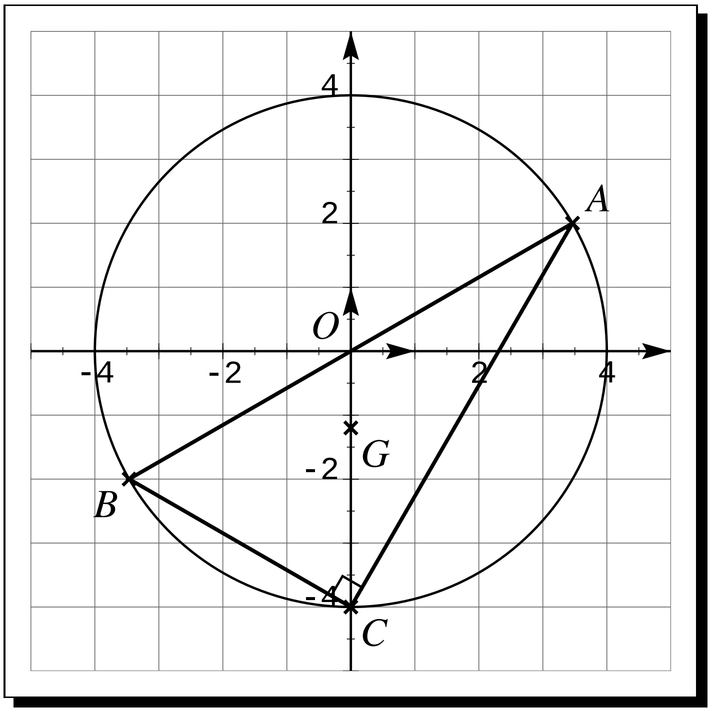
b) Il vient

$$z_B = 4\left(\cos\frac{-5\pi}{6} + i\sin\frac{-5\pi}{6}\right) = 4\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right) \quad \text{soit} \quad \boxed{z_B = -2\sqrt{3} - 2i}$$

c) Il vient

$$|z_C| = \sqrt{(-4)^2} = 4 \quad \text{et} \quad \begin{cases} \cos\theta_C = 0 \\ \sin\theta_C = -1 \end{cases} \Longrightarrow \quad \theta_C = -\frac{\pi}{2} \quad \text{convient} \quad \text{et} \quad \boxed{z_C = \left[4; -\frac{\pi}{2}\right]}$$

2.



3. On sait, d'après les questions précédentes, que

$|z_A| = 4,$ $|z_B| = 4,$ et $|z_C| = 4,$ autrement dit, $OA = OB = OC = 4$

ce qui prouve que les points A, B et C sont $\boxed{\text{sur un même cercle de centre } O \text{ et de rayon } 4}$.

4. Il vient

$$\begin{aligned} |z_B - z_A| &= \left|-2\sqrt{3} - 2i - \left(2\sqrt{3} + 2i\right)\right| \\ &= \left|-4\sqrt{3} - 4i\right| \\ &= \sqrt{(-4\sqrt{3})^2 + (-4)^2} = \sqrt{48 + 16} \quad \text{soit} \quad \boxed{|z_B - z_A| = 8}. \end{aligned}$$