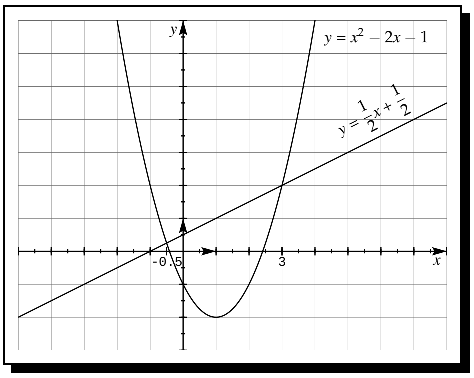
Corrigé du devoir surveillé n° 1

Exercice 1 : (*8 points*) **Résolutions d'équations et d'inéquations polynomiales**

1. *a*) Graphiquement, les solutions de l'équation $x^2-2x-1=0$ correspondent aux abscisses des points d'intersection de la courbe $y=x^2-2x-1$ avec l'axe des abscisses $y=0$. On lit donc $\boxed{\text{2 solutions : } x_1 \approx -0,4 \text{ et } x_2 \approx 2,4}$.

b)



c) Graphiquement, les solutions de l'inéquation $x^2-2x-1 \leqslant \frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$ correspondent aux abscisses des points de la parabole qui sont situés en-dessous des points de la droite $y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$. Il y a donc un seul intervalle solution et $\boxed{S=[-0,5;3]}$

2. *a*) On résoud l'équation $x^2-2x-1=0$ en utilisant la méthode du discriminant. On trouve $\Delta=8$ d'où les deux racines réelles

$$x_1=\frac{2-\sqrt{8}}{2}=\frac{2-2\sqrt{2}}{2} \quad \text{soit} \quad \boxed{x_1=1-\sqrt{2}} \qquad \text{et} \qquad x_2=\frac{2+\sqrt{8}}{2}=\boxed{1+\sqrt{2}=x_2}$$

b) Il vient

$$x^2-2x-1 \leqslant \frac{1}{2}x+\frac{1}{2} \iff x^2-\frac{5}{2}x-\frac{3}{2} \leqslant 0.$$

Et résoudre cette dernière inéquation revient à déterminer le signe du polynôme $x^2-\frac{5}{2}x-\frac{3}{2}$. On utilise pour cela la méthode du discriminant. Il vient

$$\Delta=\frac{25}{4}+\frac{4\times 3}{2}=\frac{49}{4}$$

d'où les 2 racines réelles :

$$x_1=\frac{\frac{5}{2}-\frac{7}{2}}{2}=\boxed{-\frac{1}{2}=x_1} \qquad \text{et} \qquad x_2=\frac{\frac{5}{2}+\frac{7}{2}}{2}=\boxed{3=x_2}$$

Le cours nous dit alors que le polynôme est du signe de $-a$ à l'intérieur de l'intervalle des racines, et du signe de a à l'extérieur de cet intervalle. Comme ici a est positif (puisque $a=1$), on en déduit que

$$x^2-\frac{5}{2}x-\frac{3}{2} \leqslant 0 \iff x \in \left[-\frac{1}{2};3\right] \qquad \text{ce qui prouve que}$$

$$x^2-2x-1 \leqslant \frac{1}{2}x+\frac{1}{2} \iff \boxed{x \in \left[-\frac{1}{2};3\right]}$$

Exercice 2 : (*9 points*) **Coefficients indéterminés, intersection et positions relatives de deux courbes**

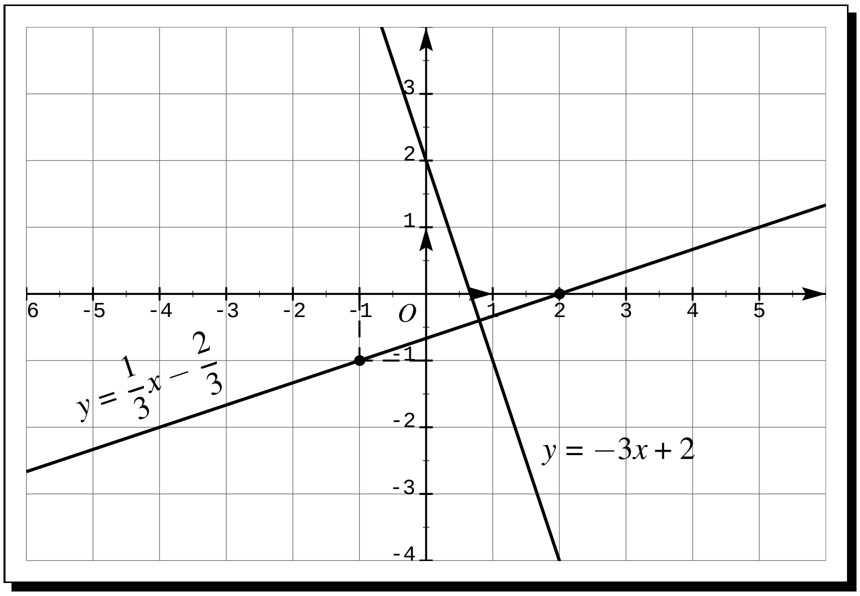
1. *a*) Graphiquement, on lit $\boxed{f(-1) = -1}$ et $\boxed{f(2) = 0}$.

b) Comme $f(x) = ax + b$, la question précédente nous donne le système :

$$\begin{array}{l}(1)\\(2)\end{array}\begin{cases}-a+b=-1\\2a+b=0\end{cases} \iff \begin{array}{l}\\(2)-(1)\end{array}\begin{cases}-a+b=-1\\3a=1\end{cases} \iff \begin{cases}b=-1+1/3=-2/3\\a=1/3\end{cases}$$

soit $\boxed{f(x) = \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}}$.

2.



3. Graphiquement, on a $f(x) = g(x)$ pour $\boxed{x \approx 0,8}$, et on a $f(x) \leqslant g(x)$ pour $\boxed{x \in]-\infty; 0,8]}$.

4. *a*) Chercher l'intersection des courbes de f et g revient à résoudre le système

$$\begin{cases}y=f(x)\\y=g(x)\end{cases} \iff \begin{cases}y=\frac{1}{3}x-\frac{2}{3}\\y=-3x+2\end{cases} \iff \begin{cases}-3x+2=\frac{1}{3}x-\frac{2}{3}\\y=-3x+2\end{cases} \iff \begin{cases}-9x+6=x-2\\y=-3x+2\end{cases}$$

$$\iff \begin{cases}8=10x\\y=-3x+2\end{cases} \iff \begin{cases}x=8/10=0,8\\y=-0,4\end{cases} \implies \boxed{\text{un point d'intersection : }(0,8;-0,4)}.$$

b) Étudier les positions relatives des courbes de f et g revient à étudier le signe de la différence $f(x) - g(x)$. Or

$$f(x)-g(x) = \frac{1}{3}x - \frac{2}{3} - (-3x+2) = \frac{1}{3}x - \frac{2}{3} + 3x - 2 \quad \text{soit} \quad \boxed{f(x)-g(x) = \frac{10}{3}x - \frac{8}{3}}$$

d'où le tableau récapitulatif :

x	0	$0,8$	$+\infty$
$f(x)-g(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	C_f au dessous de C_g		C_f au dessus de C_g

Exercice 3 : (*3 points*) **Coefficients indéterminés**

Répondre au problème posé revient à résoudre le système :

$$\begin{cases}f(-1)=-4\\f(0)=-3\\f(1)=0\end{cases} \iff \begin{cases}a-b+c=-4\\c=-3\\a+b+c=0\end{cases} \iff \begin{array}{l}(1)\\ \\(2)\end{array}\begin{cases}a-b=-1\\c=-3\\a+b=3\end{cases} \iff \begin{array}{l}(1)+(2)\\ \\ \end{array}\begin{cases}2a=2\\c=-3\\a+b=3\end{cases}$$

d'où $(a, b, c) = (1, 2, -3)$ et $\boxed{f(x) = x^2 + 2x - 3}$.