Dérivation –Études de fonctions

Exercice 1 : Résolution approchée d'une équation polynômiale de degré 4

On considère la fonction P définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $P(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{5}{3}x^3 + x^2 + 8x - 7$.

1. a) Calculer la fonction dérivée $P'(x)$

b) Calculer $P'(-1)$. Donner une interprétation géométrique du résultat de ce calcul.

c) Factoriser $P'(x)$ sous la forme $P'(x) = (x - \alpha)(ax^2 + bx + c)$ où a, b et c sont 3 réels à déterminer.

d) Étudier les variations de P.

e) Tracer la courbe représentative de la fonction P dans un repère orthogonal.

2. a) Montrer que l'équation $P(x) = 0$ admet une unique solution x_0 sur l'intervalle $[2; 4]$ (on ne demande pas de résoudre cette équation).

b) Déterminer un encadrement à 10^{-3} près de x_0. Justifier.

Exercice 2 : Calculs de dérivées – Études de signe

Pour chacune des fonctions suivantes, calculer la dérivée, étudier le signe de cette dérivée sur l'intervalle considéré, puis dreser le tableau de variation :

- **un polynôme :** f définie sur $\mathbb{R}$ par • $f(x) = -3x^4 + 6x^2 + 1$
- **un produit de polynômes :** f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (-x + 2)(3x + 7)^2$
- **un inverse :** f définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$.
- **une somme d'inverses :** f définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x) = \dfrac{2}{x^2} - \dfrac{4}{x^3}$.
- **une fraction :** f définie sur $]3; +\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{3x - 7}{-x + 3}$.

Exercice 3 : Calcul de primitives

Déterminer une primitive pour chacune des fonctions suivantes :

1. $f(x) = 5$ **2**. $f(x) = -2x$ **3**. $f(x) = \dfrac{x}{3}$ **4**. $f(x) = 2x^2$ **5**. $f(x) = x^3 + 2x$

Exercice 4 : Primitive

Déterminer une primitive de la fonction f définie sur $[-1; 0]$ par

$$f(x) = \frac{3}{(3x - 1)^2}.$$