Dérivation –Études de fonctions

Exercice 1 : Tangente parallèle à une droite donnée

On considère C_f, la courbe représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x^2 - 2x + 1.$$

Montrer qu'il existe un point A de la courbe C_f tel que la tangente à C_f en A soit parallèle à la droite d'équation $y = x$. Déterminer les coordonnées du point A ainsi qu'une équation de cette tangente.

Exercice 2 : Coefficients indéterminés

On considère C_f, la courbe représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

où a, b et c sont des constantes réelles fixées.

Sachant que C_f passe par les points $A(2, -1)$ et $B(0, 3)$, et qu'elle admet une tangente horizontale en A, déterminer les coefficients a, b et c.

Exercice 3 : Résolution approchée d'une équation trigonométrique

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x - 3 + \cos(x).$$

1. Calculer la dérivée f' de la fonction f.

2. Montrer que cette dérivée vérifie $f'(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

3. Calculer $f(0)$, $f(\pi)$ et $f(2\pi)$.

4. *a*) En vous servant des questions précédentes, montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une et une seule solution réelle x_0.

b) Déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-2} de x_0. Justifier.

Exercice 4 : Fonction cubique, lecture de graphique

On note C la courbe représentative de la fonction f définie par une écriture de la forme

$$x \mapsto ax^3 + bx^2 + cx + d.$$

Cette courbe est représentée sur la feuille annexe jointe.

1. *a*) Dresser le tableau de variation de f sur $[-3, 3]$.

b) Lire sur le graphique les valeurs de $f(0)$, $f(1)$, $f'(1)$ et $f'(-1)$.

c) Calculer, en fonction de a, b, c et d la dérivée f' de f.

d) Utiliser ce qui précède pour déterminer les valeurs de a, b, c et d.

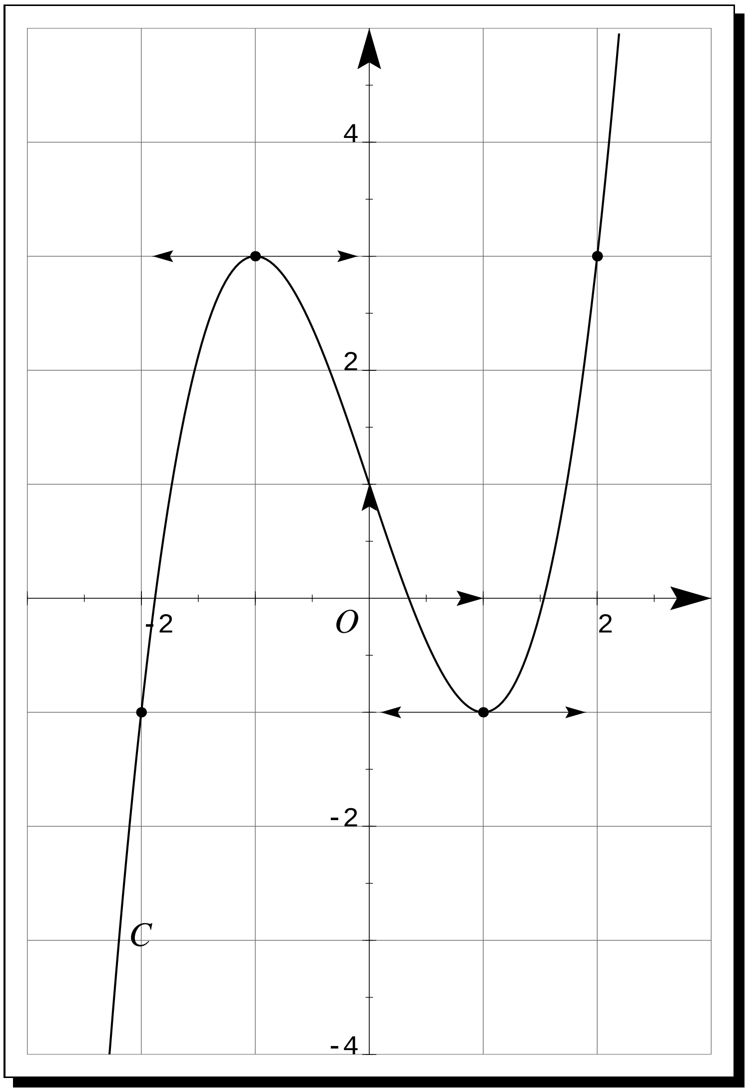
2. On admet que $f(x) = x^3 - 3x + 1$.

a) Tracer sur le même graphique la droite D d'équation $y = -x$.

b) Déterminer graphiquement une valeur approchée des solutions de l'équation

$$x^3 - 3x + 1 = -x.$$

c) Résoudre cette équation par le calcul.



Exercice 5 : Une étude complète de fonction polynôme

On considère C_f, la courbe représentative de la fonction f, définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x + 1.$$

1. *a*) Calculer la dérivée f' de la fonction f.

   b) Étudier le signe de f'. En déduire le tableau des variations de f. On calculera en particulier les valeurs exactes des extrema.

   c) Déterminer une équation de T, la tangente à la courbe C_f au point d'abscisse 2.

   d) **Sans calculatrice**, déterminer une valeur approchée à 10^{-3} près de $f(2,001)$

2. On note Δ la droite d'équation $y = 1$. Déterminer les positions relatives de C_f et Δ. On précisera en particulier les points d'intersections de ces deux courbes.

3. On note C_g la courbe représentative de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = -x$$

   a) Que peut-on dire de la courbe C_g ?

   b) Déterminer les points d'intersection de C_g avec C_f. (*Indication* : on pourra calculer $f(-1)$ et $g(-1)$).

   c) Déterminer les points de C_f qui possèdent une tangente parallèle à C_g.

4. Tracer soigneusement, dans un repère orthonormé, la courbe C_f ainsi que les droites C_g et Δ.