Devoir surveillé n° 10

durée : 2h

Exercice : (*12 points*) **Étude d'une fonction exponentielle,** bac F1**,** *1994*

Soit f la fonction numérique définie sur l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ par

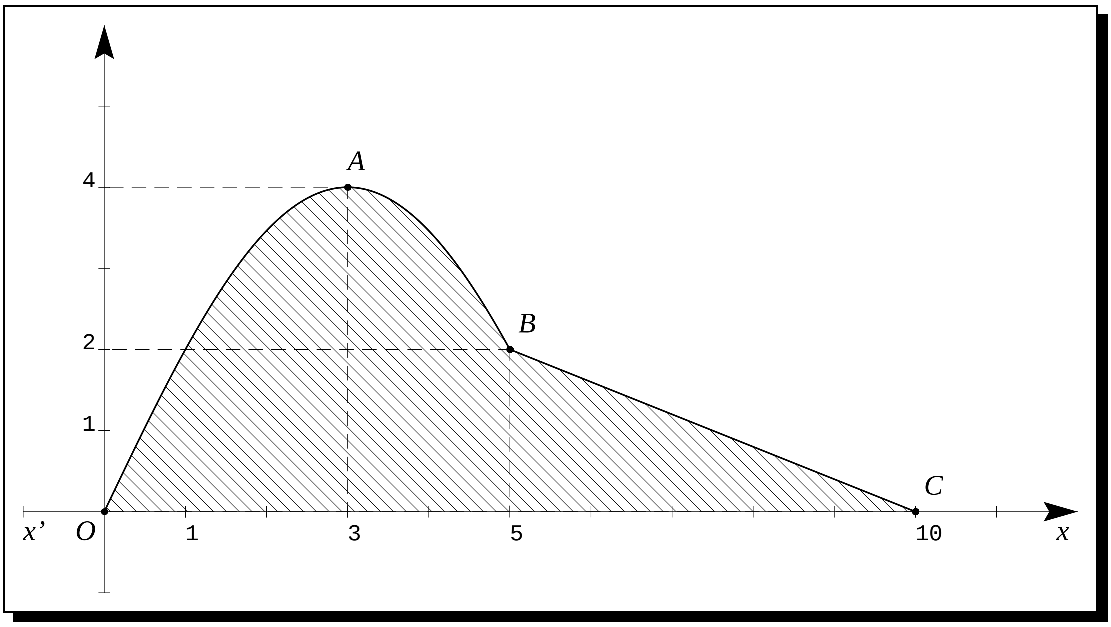
$$f(x) = 5 - x - e^{-x}.$$

On désigne par $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal d'unité graphique 1 cm.

1. *a*) Déterminer la limite de f en $+\infty$.
   b) Démontrer que $f(x)$ peut s'écrire sous la forme $f(x) = e^{-x}(5e^{x} - xe^{x} - 1)$.
   c) Déterminer la limite de $f(x)$lorsque x tend vers $-\infty$.
2. *a*) Montrer que $f'(x) = e^{-x} - 1$.
   b) Étudier le signe de $f'(x)$. En déduire le tableau de variation de la fonction f.
3. *a*) Montrer que la droite D d'équation $y = -x + 5$ est asymptote à la courbe $\mathcal{C}$.
   b) Étudier la position relative de $\mathcal{C}$ et D.
4. On considère la droite Δ d'équation $y = -x$.
   a) Calculer les coordonnées de A, le point d'intersection de Δ et $\mathcal{C}$.
   b) Calculer le coefficient directeur de la tangente en A à $\mathcal{C}$ et tracer cette tangente.
5. Construire $\mathcal{C}$ et D avec précision.
6. Calculer, en cm^2, l'aire du domaine plan limité par $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = 2$. On donnera la valeur exacte de cette aire puis la valeur approchée, arrondie au mm^2.

Exercice : (*8 points*) **Volume d'une toupie**

Le but de cet exercice est de calculer le volume d'une toupie. On obtient un modèle réduit de cette toupie par rotation autour de l'axe des abscisses (xx') de la surface hachurée ci-après (le modèle réduit représente la toupie en position « couchée »).



L'unité graphique est de 1 cm.

On donne les quatre points $A(3,4)$, $B(5,2)$, $C(10,0)$ et $D(5,0)$.

La partie inférieure du modèle réduit est le cône de révolution engendré par le triangle BCD.

La partie supérieure du modèle réduit est engendrée par la surface limitée par une courbe Γ ayant l'allure générale du schéma et vérifiant les conditions suivantes :

- La courbe (Γ) passe par les points O, A et B
- La courbe (Γ) a une tangente horizontale au point A.

1. Vérifier que la courbe d'équation

$$y = 4\sin\left(\frac{\pi x}{6}\right) \qquad (x \text{ variant de } 0 \text{ à } 5)$$

remplit ces conditions. On admet dans la suite que c'est la courbe Γ.

2. *a*) En utilisant la formule donnant le volume d'un cône de révolution ou bien en introduisant la fonction dont la courbe représentative est le segment $[BC]$, calculer le volume en cm^3 de la partie inférieure du modèle réduit.

b) Linéariser $\sin^2\left(\frac{\pi x}{6}\right)$, puis calculer le volume en cm^3 de la partie supérieure du modèle réduit.

3. Sachant que la hauteur OC de la toupie en vraie grandeur est de 30 cm, calculer la valeur exacte du volume en cm^3 de cette toupie, puis en donner une valeur approchée $0,1$ cm^3 près.

NB : *On rappelle que : si f est une fonction continue et positive sur $[a, b]$, et si E est l'ensemble des points $M(x, y)$ du plan tels que $a \leqslant x \leqslant b$ et $0 \leqslant y \leqslant f(x)$, alors le volume V d'un solide de révolution engendré par la rotation de E autour de xx' est :*

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 \, dx.$$