

Devoir surveillé n° 2

durée : 1h

Exercice 1 : (10 points) posé au bac (STI GM, 1996)

Soient les nombres complexes

$$z_1 = 2 + 2i, \quad z_2 = e^{5\pi/6}, \quad \text{et} \quad z_3 = 1 - i\sqrt{3}.$$

1. Déterminer le module et un argument de z_1 , z_2 et z_3 .
2. Le plan est rapporté à un repère orthonormal (O, \vec{u}, \vec{v}) d'unité graphique 2 cm (ou 2 grands carreaux).
 - a) Placer le point A d'affixe z_1 .
 - b) En utilisant les résultats de la question 1., que l'on fera apparaître sur la figure, placer les points B et C d'affixes respectives z_2 et z_3 .
3.
 - a) Déterminer les nombres réels a et b tels que $z_2 = a + bi$.
 - b) Montrer que $z_1 \times z_2 = -(1 + \sqrt{3}) + i(1 - \sqrt{3})$.
 - c) Déterminer la forme exponentielle de $z_1 \times z_2$.
 - d) Utiliser les résultats précédents pour donner les valeurs exactes de

$$\cos\left(\frac{13\pi}{12}\right) \quad \text{et} \quad \sin\left(\frac{13\pi}{12}\right).$$

Exercice 2 : (6 points) Calcul de valeurs moyennes

On rappelle que la valeur moyenne sur $[a, b]$ d'une fonction numérique définie et continue sur cet intervalle est le réel m défini par :

$$m = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx.$$

1. Calculer m_1 , la valeur moyenne sur $[0; \pi/2]$ de la fonction numérique f_1 définie par :

$$f_1(x) = \sin x.$$

2. Calculer m_2 , la valeur moyenne sur $[0; \pi/2]$ de la fonction numérique f_2 définie par :

$$f_2(x) = \cos^2 x.$$

3. Calculer m_3 , la valeur moyenne sur $[0; \pi/2]$ de la fonction numérique f_3 définie par :

$$f_3(x) = \sin x \cos^2 x.$$

Exercice 3 : (4 points) Du calcul. . .

On considère le nombre complexe

$$z = \frac{\sqrt{3} + i}{\sqrt{3} - i}.$$

1. Calculer deux nombres réels x et y tels que : $z = x + iy$.
2. Déterminer la forme exponentielle de z .
3. Calculer z^3 sous forme exponentielle (ou trigonométrique), puis sous forme algébrique.