Corrigé du devoir surveillé n° 10

Exercice : Étude d'une fonction exponentielle, bac F1**,** *1994*

1. *a*) On a $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty}$ car $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$.

b) Pour le calcul de la limite en $-\infty$, on ne peut utiliser l'écriture $f(x) = 5 - x - e^{-x}$ car elle donne une forme indéterminée ($\infty - \infty$). On factorise alors par « le terme dominant » pour écrire

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} e^{-x}\left(5e^{x} - xe^{x} - 1\right) \qquad \text{soit} \qquad \boxed{\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty}$$

puisque $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x} = +\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} 5e^{x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^{x} = 0$ (formulaire).

2. On trouve $\boxed{f'(x) = -1 + e^{-x}}$. Et

$$f'(x) \geqslant 0 \iff e^{-x} \geqslant 1 \iff -x \geqslant 0 \iff x \leqslant 0$$

d'où le tableau de signe de f' et le tableau de variation de f :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	4	$\searrow$	$-\infty$

3. *a*) On a

$$\lim_{x\to+\infty} \big(f(x) - (-x+5)\big) = \lim_{x\to+\infty} (-e^{-x}) = 0$$

donc $\boxed{\mathcal{D} \text{ asymptote à la courbe } \mathcal{C} \text{ en } +\infty}$.

b) Étudier la position relative de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ revient à étudier le signe de la différence $f(x) - (-x+5)$. Comme cette différence est égale à $-e^{-x}$ et que l'exponentielle est toujours strictement positive, on en déduit que cette différence est toujours strictement négative, et donc que $\boxed{\mathcal{C} \text{ est toujours en dessous de } \mathcal{D}}$.

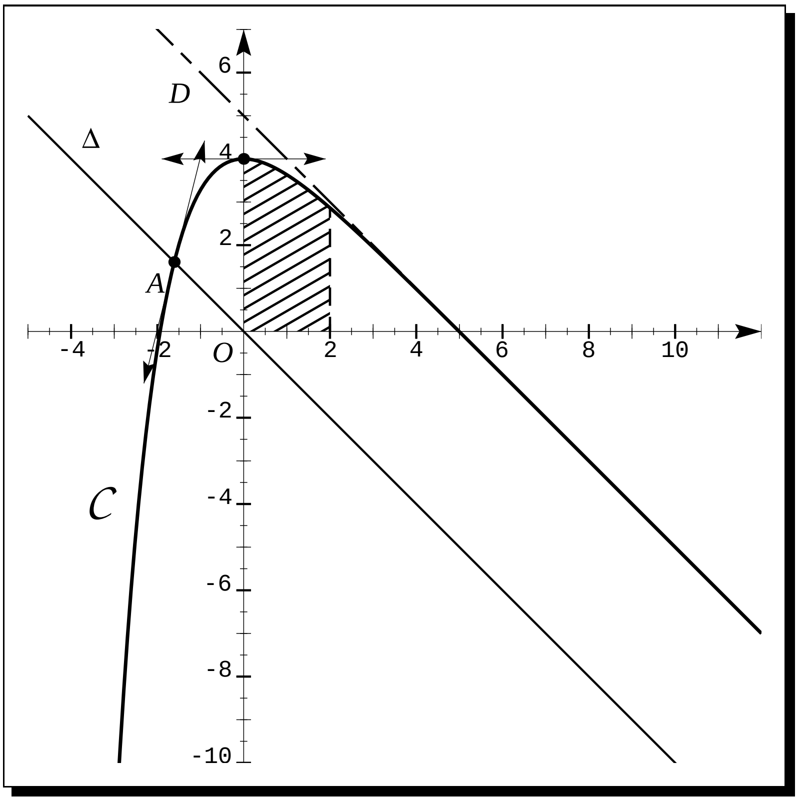
4. *a*) Déterminer les coordonnées du point d'intersection des courbes $\mathcal{C}$ et Δ revient à résoudre le système

$$\begin{cases} y = f(x) \\ y = -x \end{cases} \iff \begin{cases} -x = 5 - x - e^{-x} \\ y = -x \end{cases} \iff \begin{cases} e^{-x} = 5 \\ y = -x \end{cases} \iff \begin{cases} -x = \ln 5 \\ y = -x \end{cases}$$

d'où l'unique point d'intersection $\boxed{A(-\ln 5, \ln 5)}$.

b) Le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathcal{C}$ en A est $\boxed{f'(-\ln 5) = 4}$, puisque $f'(-\ln 5) = -1 + e^{\ln 5} = -1 + 5$.

5.



6. Comme $f(2) = 3 - e^{-2} \approx 2,86$ est positif, on voit sur le tableau de variation que la fonction f est positive sur l'intervalle $[0, 2]$. L'aire est donc donnée, en unités d'aire, par le calcul de l'intégrale

$$\int_0^2 f(x)\,dx = \int_0^2 5 - x - e^{-x}\,dx = \left[5x - \frac{x^2}{2} + e^{-x}\right]_0^2 = 7 + e^{-2}.$$

L'unité d'aire étant de $1 \times 1\,\text{cm}^2$, l'aire cherchée est donc

$$\boxed{\mathcal{A} = 7 + e^{-2}\,\text{cm}^2 \approx 714\,\text{mm}^2}$$

à $1\,\text{mm}^2$ près par excès.

Exercice : Volume d'une toupie

1. Introduisons la fonction f. Si

$$f(x) = 4\sin\left(\frac{\pi x}{6}\right) \qquad \text{alors} \qquad f'(x) = \frac{4\pi}{6}\cos\left(\frac{\pi x}{6}\right) = \boxed{\frac{2\pi}{3}\cos\left(\frac{\pi x}{6}\right) = f'(x)}$$

Il vient alors

$$f(0) = 4\sin(0) = 0 \implies \boxed{\Gamma \text{ passe par } O(0,0)}$$

$$f(3) = 4\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 4 \implies \boxed{\Gamma \text{ passe par } A(3,4)}$$

$$f(5) = 4\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) = 4 \times \frac{1}{2} = 2 \implies \boxed{\Gamma \text{ passe par } B(5,2)}$$

$$f'(3) = \frac{2\pi}{3}\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \implies \boxed{\Gamma \text{ admet une tangente horizontale au point d'abscisse 3}}$$

Ainsi $\boxed{\text{les 4 conditions sont vérifiées}}$.

2. *a*) **1ère méthode :** on utilise la formule qui donne le volume d'un cône de révolution :

$$V = \frac{\pi R^2 h}{3} \qquad \text{soit ici} \qquad \boxed{V_1 = \frac{20\pi}{3}\ \text{cm}^3}$$

2ème méthode : on introduit la fonction g dont la courbe représentative est le segment $[BC]$. Comme c'est un segment de droite, la fonction g est affine et a une écriture de la forme $g(x) = ax + b$ où a et b sont des constantes réelles. On trouve

$$\boxed{g(x) = -\frac{2}{5}x + 4} \qquad \text{d'où} \qquad V_1 = \pi \int_5^{10} \left(-\frac{2}{5}x + 4\right)^2 dx = \pi \int_5^{10} \left(\frac{4}{25}x^2 - \frac{16}{5}x + 16\right) dx$$

$$= \pi \left[\frac{4}{3 \times 25}x^3 - \frac{8}{5}x^2 + 16x\right]_5^{10}$$

$$= \pi \left(\left(\frac{160}{3} - 160 + 160\right) - \left(\frac{20}{3} - 40 + 80\right)\right) = \boxed{\frac{20\pi}{3}\ \text{cm}^3}$$

b) On trouve cette linéraisation dans le formulaire : $\boxed{\sin^2\left(\frac{\pi x}{6}\right) = \frac{1}{2}\left(1 - \cos\left(\frac{\pi x}{3}\right)\right)}$. Or le volume V_2 de la partie supérieure du modèle réduit vérifie

$$V_2 = \pi \int_0^5 4^2 \sin^2\left(\frac{\pi x}{6}\right) dx = \pi \int_0^5 \frac{16}{2}\left(1 - \cos\left(\frac{\pi x}{3}\right)\right) dx$$

$$= 8\pi \times \int_0^5 \left(1 - \cos\left(\frac{\pi x}{3}\right)\right) dx$$

$$= 8\pi \times \left[x - \frac{3}{\pi}\sin\left(\frac{\pi x}{3}\right)\right]_0^5$$

$$= 8\pi \times \left(5 - \frac{3}{\pi}\sin\left(\frac{5\pi}{3}\right) - \left(-\frac{3}{\pi}\sin 0\right)\right) = 8\pi\left(5 + \frac{3}{\pi} \times \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$\text{soit} \qquad \boxed{V_2 = \left(40\pi + 12\sqrt{3}\right)\ \text{cm}^3}$$

3. L'échelle entre le modéle réduit et le modèle réel est de 1 à 3. On a donc 1 cm pour 3 cm, 1 cm^2 pour 3^2 cm^2, et 1 cm^3 pour 3^3 cm^3. D'où le volume de la toupie en vraie grandeur :

$$V = 27 \times (V_1 + V_2)\,\text{cm}^3 \qquad \text{soit} \qquad \boxed{V = (1\,260\pi + 324\sqrt{3})\,\text{cm}^3 \approx 4\,519,6\,\text{cm}^3}$$