Corrigé du devoir surveillé n° 9

durée : 2h

Exercice : Étude d'une fonction exponentielle

– Partie I –

1. Comme $u(x) = e^x + x$, on a facilement

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} u(x) = +\infty} \quad \text{et} \quad \boxed{\lim_{x\to-\infty} u(x) = -\infty}.$$

Et $\boxed{u'(x) = 1 + e^x}$ qui est toujours strictement positif puisque e^x toujours positif. D'où le tableau de variations de u.

x	$-\infty$		$+\infty$
$u'(x)$		$+$	
$u(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

2. Comme u est une fonction strictement croissante et qu'elle change de signe sur $\mathbb{R}$, on en déduit que l'équation $u(x) = 0$ $\boxed{\text{admet une unique solution } \alpha \text{ sur } \mathbb{R}}$. Et comme $u(-1) < 0$ et $u(0) > 0$, on peut même préciser que $\boxed{\alpha \in]-1,0[}$. Avec la calculatrice, on affine l'encadrement par dichotomie pour obtenir $-0,568 < \alpha < -0,567$ (puisque $u(-0,568) < 0$ et $u(-0,567) > 0$), et la valeur approchée par défaut cherchée est $\boxed{\alpha \simeq -0,568}$

3. On a donc finalement $\boxed{u(x) \text{ négatif pour } x < \alpha}$ et $\boxed{u(x) \text{ positif pour } x > \alpha}$

– Partie II –

Beaucoup d'écritures possibles pour $f(x)$, par exemple :

$$f(x) = x - \frac{x+1}{e^x} = x - \frac{x}{e^x} - \frac{1}{e^x} = x - xe^{-x} - e^{-x} = e^{-x}(xe^x - x - 1) = \frac{xe^x - x - 1}{e^x} \ldots$$

Le tout est de choisir la bonne, suivant l'utilisation que l'on veut en faire...

1. $$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(x - \frac{x}{e^x} - \frac{1}{e^x}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\underbrace{x}_{\to +\infty} - \underbrace{xe^{-x}}_{\to 0} - \underbrace{e^{-x}}_{\to 0}\right) = \boxed{+\infty = \lim_{x\to+\infty} f(x)}.$$

et $$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \underbrace{e^{-x}}_{\to +\infty}(\underbrace{xe^x}_{\to 0} \underbrace{-x}_{\to +\infty} - 1) = \boxed{+\infty = \lim_{x\to-\infty} f(x)}.$$

2. On a

$$f'(x) = 1 - \frac{e^x - xe^x - e^x}{\left(e^x\right)^2} = 1 + \frac{x}{e^x} = \frac{e^x + x}{e^x} \qquad \text{soit} \qquad \boxed{f'(x) = \frac{u(x)}{e^x}},$$

ce qui prouve que $\boxed{f'(x) \text{ est du signe de } u(x)}$ car e^x est toujours positif. D'où le tableau de variations de f :

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\simeq -1,33$	$\nearrow$	$+\infty$

On peut remarquer que l'on a $f(\alpha) = 1 + \alpha + \dfrac{1}{\alpha}$ puisque $e^\alpha = -\alpha$ d'après le **I. 2.**.

– Partie III –

1. On a $\lim_{x\to+\infty} \left(f(x) - x\right) = \lim_{x\to+\infty} (-xe^{-x} - e^{-x}) = 0$ (car $\lim_{x\to+\infty} xe^{-x} = 0$ d'après le cours), donc

$$\boxed{\mathcal{D} \text{ et } \mathcal{C} \text{ sont asymptotes en } +\infty}.$$

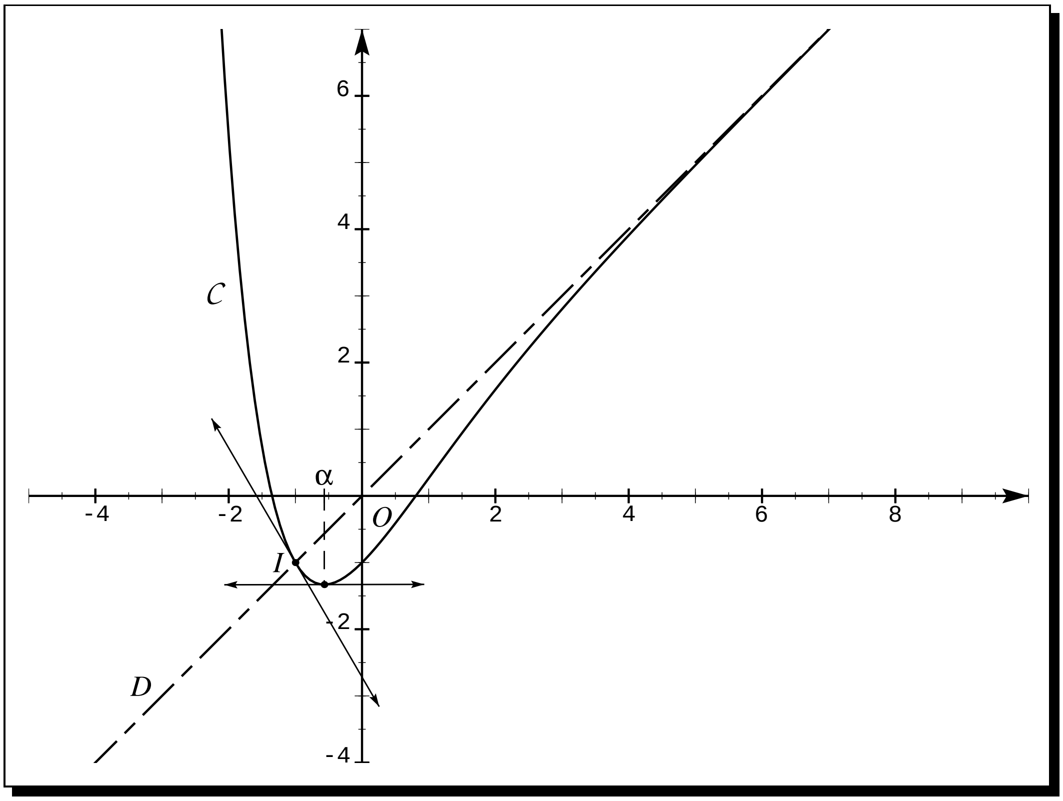
2. On a $g(x) = f(x) - x = -xe^{-x} - e^{-x} = -e^{-x}(x+1)$, donc $g(x)$ est du signe de $-(x+1)$ d'où les positions relatives :

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f(x)-x$	$+$	0	$-$
positions	C_f au dessus de D		C_f au dessous de D

En particulier, il n'y a qu'un seul point d'intersection : $\boxed{\text{le point } I(-1,-1)}$.

3. On a $f'(-1) = 1 - e$ et $f(1) = -1$ d'où la tangente cherchée $\boxed{T: \quad y = (1-e)x - e}$.

4.



– Partie IV –

1. *a*) On veut que h soit une primitive de g. Autrement dit, on veut avoir $h'(x) = g(x)$. Comme $h'(x) = ae^{-x} - (ax+b)e^{-x} = e^{-x}(-ax + a - b)$ et que $g(x) = e^{-x}(-x-1)$, on voit, par identification des coefficients, que l'on doit avoir

$$\begin{cases} -a = -1 \\ a - b = -1 \end{cases} \qquad \text{soit} \qquad \boxed{a = 1} \quad \text{et} \quad \boxed{b = 2}$$

On en déduit qu'une primitive de g est la fonction h définie par $\boxed{h(x) = (x+2)e^{-x}}$.

b) Et comme $f(x) = g(x) + x$, on en déduit qu'une primitive de la fonction F est, par exemple, la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $\boxed{F(x) = \dfrac{x^2}{2} + (x+2)e^{-x}}$.

2. Comme $f(-1) = -1$ et $f(0) = -1$, on en déduit, au vu du tableau de variations, que la fonction f reste négative sur tout l'intervalle $[-1, 0]$. L'aire cherchée est donc donnée par le calcul

$$\mathcal{A} = -\int_{-1}^{0} f(x)\,dx = -\big[F(x)\big]_{-1}^{0} = -\left(2 - \frac{1}{2} - e\right) = e - \frac{3}{2} \quad \text{en unités d'aire}$$

L'unité d'aire étant de $2 \times 2 = 4\text{ cm}^2$, on en déduit que l'aire cherchée est de $\boxed{(4e-6)\text{ cm}^2}$, soit, à 10^{-2} près par défaut, $\boxed{\mathcal{A} \simeq 4{,}873\,\text{cm}^2}$.