Corrigé du devoir surveillé n$^{\text{o}}$ 7

Exercice 2 : Dérivées et tableaux de variation

a) • On utilise la formule $(uv)' = u'v + uv'$. Il vient $f'(x) = e^x + xe^x$, soit $\boxed{f'(x) = e^x(1+x)}$.

• *Étude du signe de la dérivée*

Comme e^x est toujours positif, la dérivée est du signe de $1+x$. Or on a $1 + x \geqslant 0$ ssi $x \geqslant -1$. D'où le tableau :

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$1+x$		$-$	0	$+$	
e^x		$+$		$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	$-e^{-1} = -\dfrac{1}{e}$	$\nearrow$	

b) • Pour $f(x) = \dfrac{e^x+1}{e^x-1}$, on utilise la formule $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$. Il vient

$$f'(x) = \frac{e^x(e^x-1) - (e^x+1)e^x}{(e^x-1)^2} \qquad \text{soit} \qquad \boxed{f'(x) = \frac{-2e^x}{(e^x-1)^2}}$$

• *Étude du signe de la dérivée*

On a $(e^x-1)^2$ qui est égal à 0 quand $x = 0$, et qui est toujours positif sinon (c'est un carré). Donc la dérivée est du signe de $-2e^x$. Et comme e^x est toujours positif, $\boxed{f' \text{ est toujours négative}}$. D'où le tableau :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$-2e^x$		$-$		$-$	
$(e^x-1)^2$		$+$	0	$+$	
$f'(x)$		$-$	$\|$	$-$	
$f(x)$		$\searrow$	$\|$	$\searrow$	

Exercice 1 : Étude d'une fonction exponentielle, bac F1, *1994*

1. *a*) On a $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty}$ car $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$.

b) Pour le calcul de la limite en $-\infty$, on ne peut utiliser l'écriture $f(x) = 5 - x - e^{-x}$ car elle donne une forme indéterminée $(\infty - \infty)$. On factorise alors par « le terme dominant » pour écrire

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} e^{-x}(5e^x - xe^x - 1) \qquad \text{soit} \qquad \boxed{\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty}$$

puisque $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x} = +\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} 5e^x = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0$ (formulaire).

2. On trouve $\boxed{f'(x) = -1 + e^{-x}}$. Et

$$f'(x) \geqslant 0 \iff e^{-x} \geqslant 1 \iff -x \geqslant 0 \iff x \leqslant 0$$

d'où le tableau de signe de f' et le tableau de variation de f :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	4	$\searrow$	$-\infty$

3. *a*) On a

$$\lim_{x\to+\infty}\big(f(x)-(-x+5)\big)=\lim_{x\to+\infty}(-e^{-x})=0$$

donc $\boxed{D \text{ asymptote à la courbe } \mathcal{C} \text{ en } +\infty}$.

b) Étudier la position relative de $\mathcal{C}$ et D revient à étudier le signe de la différence $f(x)-(-x+5)$. Comme cette différence est égale à $-e^{-x}$ et que l'exponentielle est toujours strictement positive, on en déduit que cette différence est toujours strictement négative, et donc que $\boxed{\mathcal{C} \text{ est toujours en dessous de } D}$.

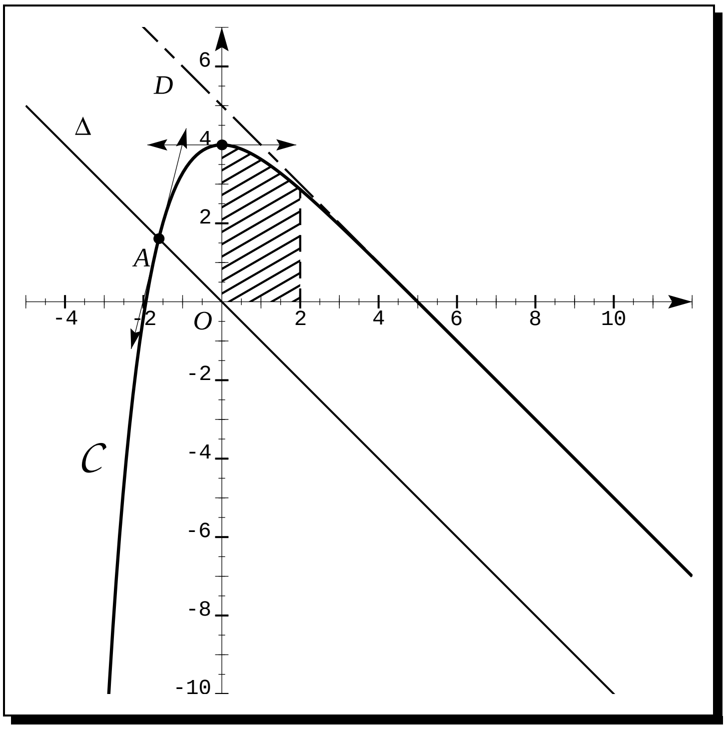
4. *a*) Déterminer les coordonnées du point d'intersection des courbes $\mathcal{C}$ et Δ revient à résoudre le système

$$\begin{cases} y=f(x) \\ y=-x \end{cases} \iff \begin{cases} -x=5-x-e^{-x} \\ y=-x \end{cases} \iff \begin{cases} e^{-x}=5 \\ y=-x \end{cases} \iff \begin{cases} -x=\ln 5 \\ y=-x \end{cases}$$

d'où l'unique point d'intersection $\boxed{A(-\ln 5, \ln 5)}$.

b) Le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathcal{C}$ en A est $\boxed{f'(-\ln 5)=4}$, puisque $f'(-\ln 5)=-1+e^{\ln 5}=-1+5$.

5.



6. Comme $f(2)=3-e^{-2}\approx 2,86$ est positif, on voit sur le tableau de variation que la fonction f est positive sur l'intervalle $[0,2]$. L'aire est donc donnée, en unités d'aire, par le calcul de l'intégrale

$$\int_0^2 f(x)\,dx=\int_0^2 5-x-e^{-x}\,dx=\left[5x-\frac{x^2}{2}+e^{-x}\right]_0^2=7+e^{-2}.$$

L'unité d'aire étant de $1\times 1\,\text{cm}^2$, l'aire cherchée est donc

$$\boxed{\mathcal{A}=7+e^{-2}\,\text{cm}^2\approx 714\,\text{mm}^2}$$

à $1\,\text{mm}^2$ près par excès.