CCorrigé du devoir surveillé n° 6

Exercice : Étude d'une fonction logarithme *bac sti gm, juin 2002*

A

1. Il vient $\boxed{g'(x) = 3x^2 + \dfrac{2}{x}}$. Et comme x est strictement positif (puisque l'intervalle de définition de g est $]0;+\infty[$), on en déduit que $\boxed{g'(x) \text{ est toujours positif}}$, comme somme de termes positifs.

2. 3. 4. On trouve $\boxed{g(1) = 0}$, ce qui nous donne alors le tableau récapitulatif suivant :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$g'(x)$			$+$		
$g(x)$		$\nearrow$	0	$\nearrow$	
signe de $g(x)$		$-$		$+$	

B

1. *a*) En $+\infty$, il vient

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x - 1 - \frac{\ln x}{x^2} \qquad \text{soit} \qquad \boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$$

puisque

$$\lim_{x\to+\infty} x - 1 = +\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^2} = 0 \quad \text{d'après le cours.}$$

Et en 0, il vient

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0^+} x - 1 - \frac{\ln x}{x^2} \qquad \text{soit} \qquad \boxed{\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty}$$

puisque

$$\lim_{x\to 0} x - 1 = -1 \qquad \lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty \qquad \lim_{x\to 0^+} x^2 = 0^+ \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{x^2} = -\infty$$

b) De la limite de $f(x)$ en 0, on en déduit que $\boxed{\text{la droite d'équation } x = 0 \text{ est asymptote verticale}}$ à la courbe de f. Et on a bien la droite $\boxed{y = x - 1 \text{ asymptotote oblique}}$ puisque

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) - (x-1) = \lim_{x\to+\infty} x - 1 + \frac{\ln x}{x^2} - (x-1) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^2} = 0 \quad \text{d'après le cours.}$$

c) Comme

$$f(x) = x - 1 + \frac{\ln x}{x^2} \qquad \text{il vient} \qquad f'(x) = 1 + \frac{x^2/x - 2x\ln x}{x^4} = 1 + \frac{x - 2x\ln x}{x^4} = \frac{x^3}{x^3} + \frac{1 - 2\ln x}{x^3}$$

donc on a bien $\boxed{f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^3}}$.

d) Reste à dresser le tableau de signe de la dérivée f pour obtenir le tableau de variation de f :

x	0		1		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	
x^3	0	$+$	$\vert$	$+$	
$f'(x)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

e) Chercher l'intersection entre l'asymptote oblique et la courbe de f revient à résoudre le système

$$\begin{cases} y = x-1 \\ y = f(x) \end{cases} \iff \begin{cases} y = x-1 \\ x-1 = x-1-\frac{\ln x}{x^2} \end{cases} \iff \begin{cases} y = x-1 \\ 0 = \frac{\ln x}{x^2} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} y = x-1 \\ 0 = \ln x \end{cases} \iff \begin{cases} y = 0 \\ x = 1 \end{cases}$$

d'où l'unique point d'intersection : $\boxed{I(1;0)}$.

Pour les positions relatives, il faut étudier le signe de $f(x)-(x-1)$. En reprenant les calculs précédents, on s'aperçoit que ce signe est celui de $-\ln x$ puisque $f(x)-(x-1) = -(\ln x)/x^2$ avec x^2 toujours positif. D'où le tableau récapitulatif suivant :

x	0		1		$+\infty$
$-\ln x$		$+$	0	$-$	
$f(x)-(x-1)$		$+$	0	$-$	
		$\mathcal{C}$ au dessus de $\mathcal{D}$		$\mathcal{C}$ au dessous de $\mathcal{D}$	

2. *a*) Comme

$$H(x) = -\frac{1}{x}(1+\ln x), \quad \text{il vient} \quad H'(x) = \frac{1}{x^2}(1+\ln x) - \frac{1}{x} \times \frac{1}{x} = \frac{\ln x}{x^2}.$$

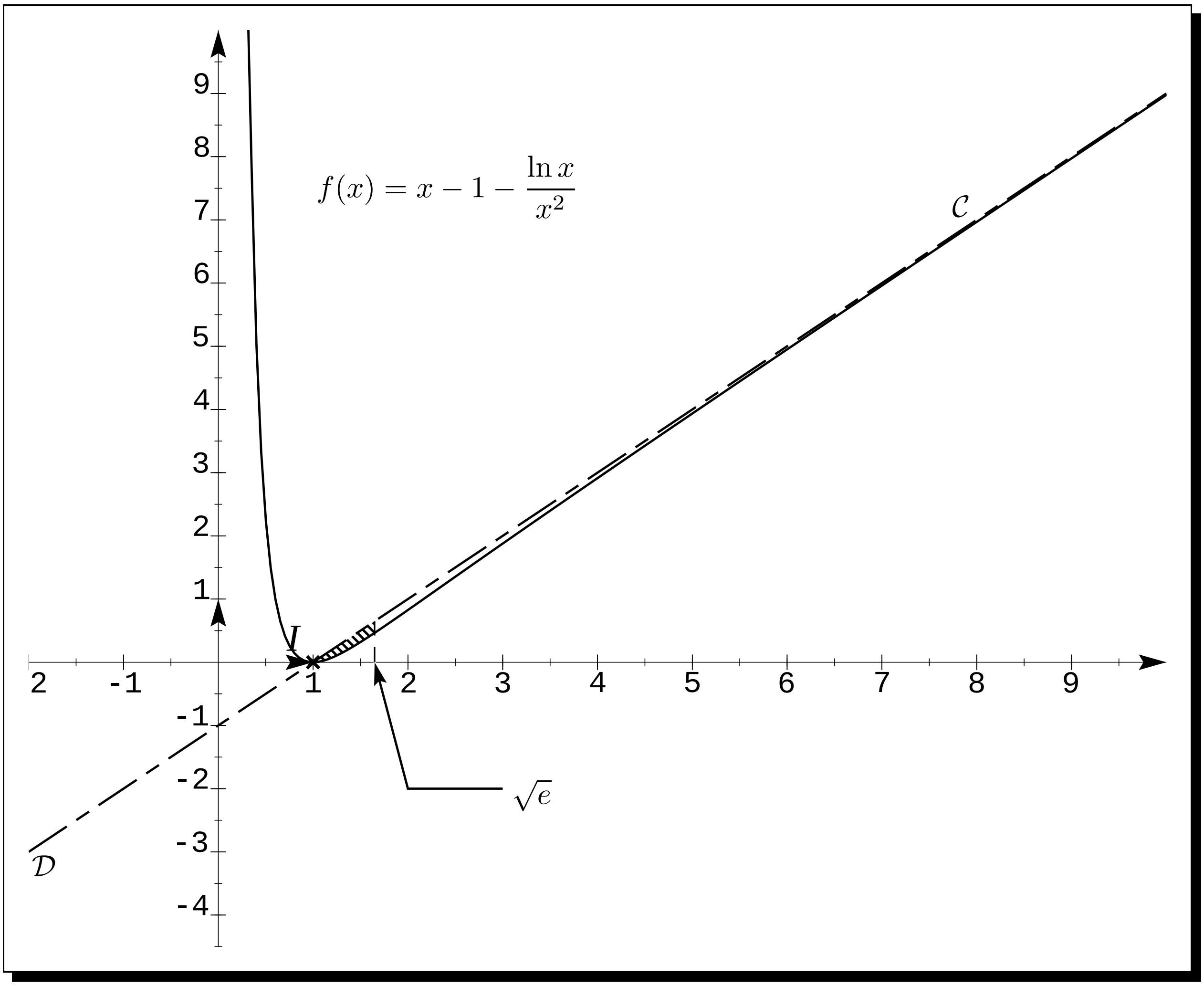
Ce qui prouve que $\boxed{H \text{ est une primitive de } \dfrac{\ln x}{x^2}}$.

b) L'unité d'aire est de $\boxed{3 \times 2 = 6\,\text{cm}^2}$. Par définition de l'intégrale, et comme la courbe $\mathcal{C}$ est au dessous de $\mathcal{D}$ sur l'intervalle $[1;\sqrt{e}]$, on aura

$$\Delta = 6 \times \int_1^{\sqrt{e}} (x-1) - f(x)\,dx = 6 \times \int_1^{\sqrt{e}} \frac{\ln x}{x^2}\,dx = 6 \times \Big[H(x)\Big]_1^{\sqrt{e}} = 6 \times \big(H(\sqrt{e}) - H(1)\big)$$

Comme $H(1) = -1$ et que $H(\sqrt{e}) = -3/2\sqrt{e}$ (puisque $\sqrt{e} = e^{1/2}$, et donc $\ln\sqrt{e} = 1/2$), il vient

$$\Delta = 6 \times \left(-\frac{3}{2\sqrt{e}} + 1\right) \qquad \text{soit} \qquad \boxed{\Delta = -\frac{9}{\sqrt{e}} + 6 \approx 0,54\,\text{cm}^2 \approx 54\,\text{mm}^2}$$



$f(x) = x - 1 - \dfrac{\ln x}{x^2}$
$\mathcal{C}$
$\mathcal{D}$
I
$\sqrt{e}$
9
8
7
6
5
4
3
2
1
-1
-2
-3
-4
2
-1
1
2
3
4
5
6
7
8
9