Corrigé du devoir surveillé n° 5

durée : 45 mn

Exercice : Étude d'une fonction rationnelle. (*d'après Bac* F_1, *1991*)

1. On a bien sûr $\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$ puisque

$$f(x) = x + 2 + \frac{4}{x-2} \qquad \text{avec} \qquad \begin{cases} \lim_{x\to+\infty} \dfrac{4}{x-2} = 0 \\ \lim_{x\to+\infty} x + 2 = +\infty \end{cases}$$

2. *a*) On a $\lim_{x\to+\infty} [f(x) - (x+2)] = \lim_{x\to+\infty} \dfrac{4}{x-2} = 0$. Donc on a bien $\boxed{\Delta \text{ asymptote à } C_f \text{ en } +\infty}$.

b) De plus, la différence $f(x) - (x+2)$ est égale à $4/(x-2)$ qui est du signe de $(x-2)$. On en déduit, puisque $x > 2$, que $(x-2)$ est toujours positif sur l'intervalle, et donc que $\boxed{C_f \text{ est toujours au dessus de } \Delta}$ sur l'intervalle $]2, +\infty[$.

3. *a*) Et on a $\boxed{\lim_{x\to2^+} f(x) = +\infty}$ puisque

$$f(x) = x + 2 + \frac{4}{x-2} \qquad \text{avec} \qquad \begin{cases} \lim_{x\to2^+} x - 2 = 0^+ \\ \lim_{x\to2^+} \dfrac{4}{x-2} = +\infty \\ \lim_{x\to2} x + 2 = 4 \end{cases}$$

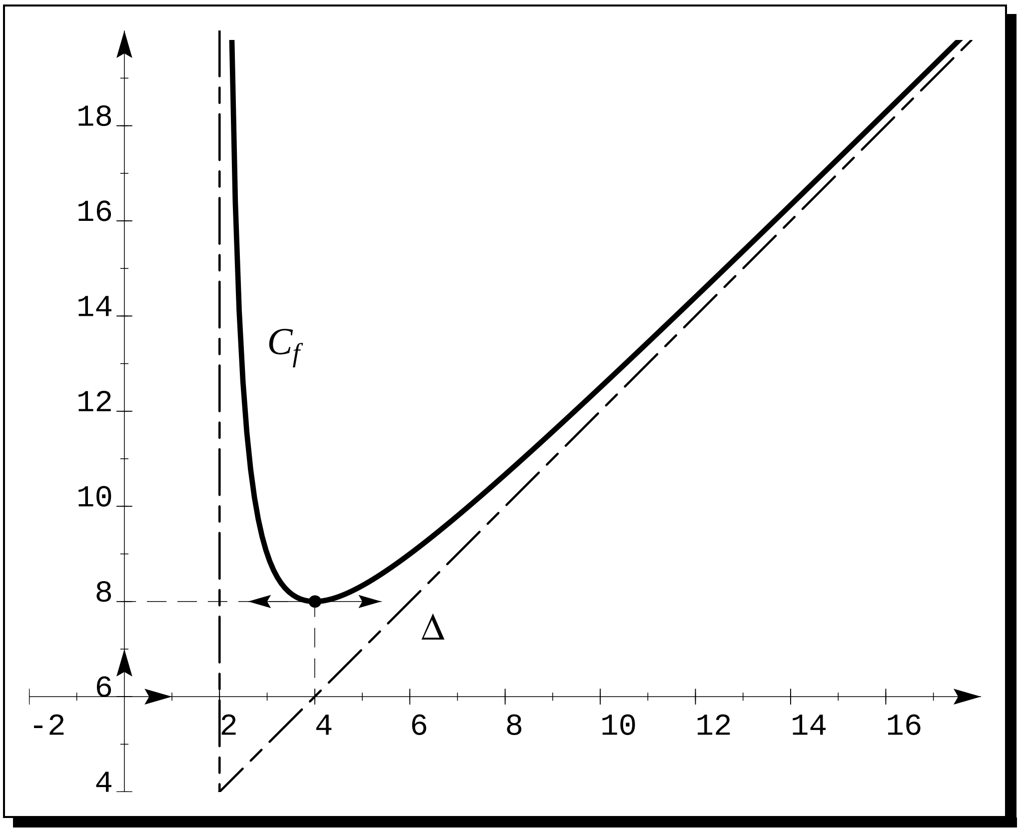
b) On en déduit immédiatement que $\boxed{\text{la droite } x = 2 \text{ est asymptote verticale à } C_f}$

4. On a

$$f'(x) = 1 - \frac{4}{(x-2)^2} = \frac{x^2 - 4x + 4 - 4}{(x-2)^2} \qquad \text{soit} \qquad \boxed{f'(x) = \frac{x(x-4)}{(x-2)^2}}$$

qui est du signe de $x(x-4)$ puisque $(x-2)^2$ est toujours positif, et donc du signe de $(x-4)$ puisque $x > 2$ par définition de f. D'où le tableau de signe de f', suivi du tableau de variations de f :

x	2		4		$+\infty$
$x-4$		$-$	0	+	
$f'(x)$		$-$	0	+	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	8	$\nearrow$	$+\infty$



5. On a $f(3) = 9$ et $f'(3) = -3$, d'où l'équation de T :

$$y = -3(x - 3) + 9 \qquad \text{soit} \qquad \boxed{T \ : y = -3x + 18}$$