Corrige du devoir surveillé n° 4

Exercice 1 : Étude d'une cubique – Calcul d'aire

1. *a*) La courbe passe par les points $A(0, 1)$ et $(1, -1)$ donc $\boxed{f(0) = 1}$ et $\boxed{f(1) = -1}$. De plus, on a des tangentes horizontales en $A(0, 1)$ et $B(2, -3)$, donc $\boxed{f'(0) = 0}$ et $\boxed{f'(2) = 0}$.

b) Comme $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$, on déduit des quatres conditions ci-dessus le système

$$\begin{cases} d = 1 \\ a + b + c + d = -1 \\ c = 0 \\ 12a + 4b + c = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} d = 1 \\ a + b = -2 \\ c = 0 \\ 3a + b = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} d = 1 \\ b = -3 \\ c = 0 \\ a = 1 \end{cases}$$

donc $\boxed{(a, b, c, d) = (1, -3, 0, 1)}$, et $\boxed{f(x) = x^3 - 3x^2 + 1}$.

2. *a*) On a $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} x^3\left(1 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^3}\right)$, donc $\boxed{\displaystyle\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty}$.

De la même façon, $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty} x^3\left(1 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^3}\right)$, donc $\boxed{\displaystyle\lim_{x\to-\infty} g(x) = -\infty}$.

b) On a $g'(x) = 3x^2 - 6x$, et donc, sous forme factorisée, $\boxed{g'(x) = 3x(x - 2)}$. Une étude de signe permet de conclure :

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$3x$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$x - 2$		$-$	|	$-$	0	$+$	
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$+\infty$

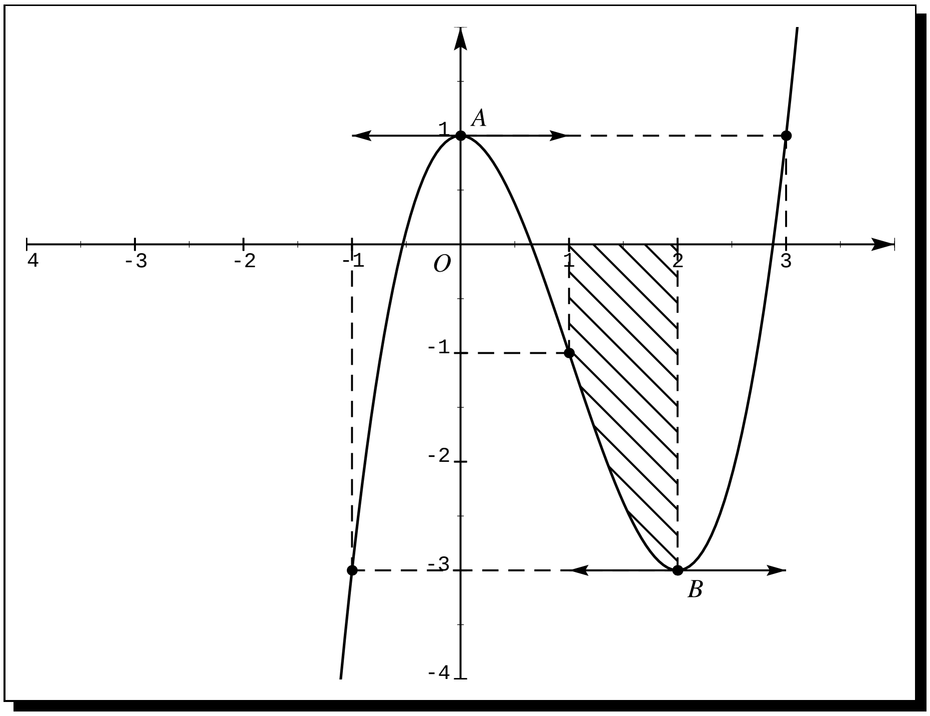
3. *a*) On trouve $\boxed{g(1) = -1}$, or g est décroissante sur $[1, 2]$ d'après le tableau de variations, donc $\boxed{g(x) < 0 \text{ sur } [1, 2]}$.

b) La fonction g gardant un signe constant négatif sur $[1, 2]$, l'aire cherchée est donnée, en unités d'aire, par le calcul

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= -\int_1^2 f(x)\,dx = \int_2^1 (x^3 - 3x^2 + 1)\,dx \\ &= \left[\frac{x^4}{4} - x^3 + x\right]_2^1 = \frac{1}{4} + 2 = \frac{9}{4}. \end{aligned}$$

L'unité d'aire étant de $2 \times 2 = 4\,\text{cm}^2$, on en déduit qu'une mesure de l'aire cherchée est $\boxed{\mathcal{A} = 9\,\text{cm}^2}$.

c)



Exercice 2 : Étude d'une fonction rationnelle

1. On trouve $\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$ puisque

$$f(x) = x + \frac{3}{x} - \frac{1}{x^2} \qquad \text{avec} \qquad \begin{cases} \lim_{x\to+\infty} x = +\infty \\ \lim_{x\to+\infty} \frac{3}{x} = 0 \\ \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2} = 0 \end{cases}$$

2. *a*) On trouve facilement $\boxed{f(x) = \dfrac{x^3 + 3x - 1}{x^2}}$ par réduction au même dénominateur de l'expression de f proposée.

b) On en déduit que

$$\boxed{\lim_{x\to 0} f(x) = -\infty} \qquad \text{puisque} \qquad \begin{cases} \lim_{x\to 0} x^3 + 3x - 1 = -1 \\ \lim_{x\to 0} x^2 = 0^+ \end{cases}$$

Géométriquement, cette limite signifie que la droite d'équation $\boxed{x = 0 \text{ est asymptote verticale à } C_f}$

3. *a*) Et on a $\boxed{\Delta \text{ asymptote à } C_f \text{ en } +\infty}$ puisque

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) - x = \lim_{x\to+\infty} \frac{3}{x} - \frac{1}{x^2} = 0$$

d'après les calculs du **1.**.

b) Chercher l'intersection de la droite Δ avec la courbe C_f revient à résoudre le système

$$\begin{cases} y = x \\ y = f(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x \\ x = x + \dfrac{3}{x^2} - \dfrac{1}{x^3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x \\ 0 = \dfrac{3x - 1}{x^3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x \\ 0 = 3x - 1 \end{cases}$$

Ce système n'admet qu'un couple soltion, d'où les coordonnées de l'unique point d'intersection : $\boxed{K\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)}$

4. *a*) Le calcul de $f'(x)$ donne

$$f'(x) = 1 - \frac{3}{x^2} + \frac{2}{x^3} \qquad \text{soit} \qquad \boxed{f'(x) = \frac{x^3 - 3x + 2}{x^3}}.$$

Or le développement de l'expression proposée donne

$$\frac{(x-1)^2(x+2)}{x^3} = \frac{(x^2 - 2x + 1)(x+2)}{x^3} = \frac{x^3 - 3x + 2}{x^3} = f'(x).$$

D'où le résultat demandé.

b) Pour l'étude du signe de la dérivée, on utilise la forme factorisée de f' puis on fait un tableau de signes :

x	0		1		$+\infty$
$(x-1)^2$		$+$	0	$+$	
$x+2$		$+$	|	$+$	
x^3	0	$+$	|	$+$	
$f'(x)$	||	$+$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	3	↗	$+\infty$

c) Quand au calcul de la tangente, on utilise la formule $y = f'(a)(x-a) + f(a)$. Sachant que $f'(1) = 0$ et que $f(1) = 3$, il vient $\boxed{T\ : y = 3}$.

5.