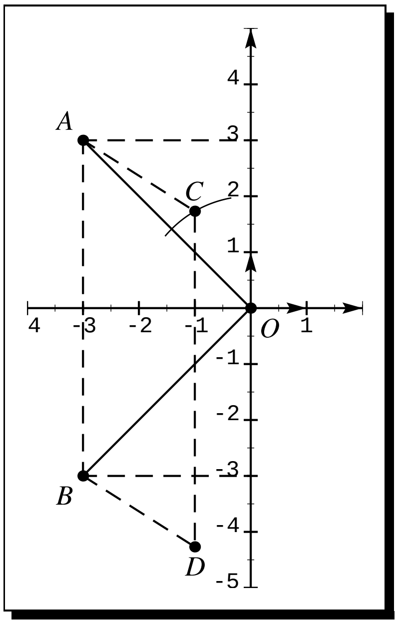
Corrigé du devoir surveillé n° 3

Exercice : Complexes, *d'après bac sti gt, juin 98*



1. On résoud en utilisant la méthode du discriminant. On trouve $\Delta = -36$, d'où les 2 racines complexes conjuguées :

$$\boxed{z_1 = -3 + 3i} \quad \text{et} \quad \boxed{z_2 = -3 - 3i}.$$

2. *a*) *b*) On a

$$z_1 = 3\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \quad \text{et} \quad z_2 = 3\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

D'où les résultats demandés :

$$\boxed{|z_1| = |z_2| = 3\sqrt{2}} \quad \text{et} \quad \boxed{\theta_1 = 3\pi/4}, \quad \boxed{\theta_2 = -3\pi/4}$$

Et on a les formes exponentielles

$$\boxed{z_1 = 3\sqrt{2}\,e^{3i\pi/4}} \quad \text{et} \quad \boxed{z_2 = 3\sqrt{2}\,e^{-3i\pi/4}}$$

c) Connaissant les affixes de A et B, on en déduit les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$:

$$\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \end{pmatrix}$$

d'où le produit scalaire

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = -3 \times 3 - 3 \times (-3 = 0)$$

ce qui prouve que $\boxed{AOB \text{ rectangle en } O}$. De plus, on a vu que les modules $|z_A|$ et $|z_B|$ son égaux, ce qui prouve que les distances OA et OB sont égales. Le triangle AOB est donc également $\boxed{\text{isocèle}}$.

3. Soit $z_3 = -1 + i\sqrt{3}$.

a) On trouve

$$\boxed{|z_3| = 2}, \quad \text{et} \quad \boxed{\theta_3 = 2\pi/3} \quad \text{d'où} \quad \boxed{|z_1 \times z_3| = 6\sqrt{2}} \quad \text{et} \quad \boxed{\mathrm{Arg}(z_1 \times z_3) = \frac{17\pi}{12}},$$

puisque $|z_1 \cdot z_3| = |z_1| \times |z_3|$ et $\mathrm{Arg}(z_1 \cdot z_3) = \mathrm{Arg}(z_1) + \mathrm{Arg}(z_3)$. Ona donc finalement

$$\boxed{z_1 \cdot z_3 = \left[6\sqrt{2}, \frac{17\pi}{12}\right] = 6\sqrt{2}\left(\cos\frac{17\pi}{12} + i\sin\frac{17\pi}{12}\right).}$$

b) En utilisant maintenant les formes algébriques de z_1 et z_3, il vient

$$(-3 + 3i)(-1 + i\sqrt{3}) = 3(1 - \sqrt{3}) - 3i(1 + \sqrt{3}) \quad \text{d'où} \quad \boxed{z_1 \cdot z_3 = 3(1 - \sqrt{3}) - 3i(1 + \sqrt{3})}$$

c) Reste à utiliser les deux relations précédentes en identifiant les parties réelles et imaginaires pour obtenir :

$$\boxed{\cos\frac{17\pi}{12} = \frac{1 - \sqrt{3}}{2\sqrt{2}}} \quad \text{et} \quad \boxed{\sin\frac{17\pi}{12} = \frac{-1 - \sqrt{3}}{2\sqrt{2}}}$$

4. *a*) Le quadrilatère $ABDC$ est un parallélogramme si et seulement si

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \iff z_B - z_A = z_D - z_C \iff z_B - z_A + z_C = z_D$$

$$\iff z_D = (-3 - 3i) - (-3 + 3i) + (-1 + i\sqrt{3}) \quad \text{soit} \quad \boxed{z_D = -1 + (\sqrt{3} - 6)i}$$