Corrigé du bac blanc STI

Exercice 1 : (*4 points*) **Résolution d'équations**

1. On trouve facilement $\boxed{P(1) = 0}$.

2. Il vient

$$\begin{aligned} P(x) = (x-1)(ax^2+bx+c). &= ax^3+bx^2+cx-ax^2-bx-c \\ &= ax^3+(b-a)x^2+(c-b)x-c. \end{aligned}$$

En identifiant aux coefficients du polynôme $P(x) = x^3 - 5x^2 - x + 5$, on obtient le système :

$$\begin{cases} a = 1 \\ b-a = -5 \\ c-b = -1 \\ -c = 5 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 1 \\ b = -4 \\ c = -5 \end{cases} \iff \boxed{P(x) = (x-1)(x^2-4x-5)}$$

3. En utilisant la forme factorisée de P, on a

$$P(x) = 0 \quad \iff \quad x-1 = 0 \quad \text{ou} \quad x^2-4x-5 = 0$$

On utilise la méthode du discriminant Δ, ici égal à 36, pour trouver les deux racines $x_1 = -1$ et $x_2 = 5$ de la deuxième équation. En conclusion, $\boxed{\text{les racines de } P(x) \text{ sont } 1, -1 \text{ et } 5}$.

4. *a*) Posons le changement de variable $X = \ln x$. L'équation proposée s'écrit alors

$$\begin{aligned} X^3-5X^2-X+5 = 0 &\iff X = 1 \quad \text{ou} \quad X = -1 \quad \text{ou} \quad X = 5 \\ &\iff \ln x = 1 \quad \text{ou} \quad \ln x = -1 \quad \text{ou} \quad \ln x = 5 \\ &\iff x = e \quad \text{ou} \quad x = e^{-1} \quad \text{ou} \quad x = e^5 \end{aligned}$$

d'où les $\boxed{3 \text{ solutions : } e, e^{-1} \text{ et } e^5}$.

b) Posons le changement de variable $X = e^x$. L'équation proposée s'écrit alors

$$\begin{aligned} X^3-5X^2-X+5 = 0 &\iff X = 1 \quad \text{ou} \quad X = -1 \quad \text{ou} \quad X = 5 \\ &\iff e^x = 1 \quad \text{ou} \quad \underbrace{e^x = -1}_{\text{impossible}} \quad \text{ou} \quad e^x = 5 \\ &\iff x = \ln 1 = 0 \quad \text{ou} \quad x = \ln 5 \end{aligned}$$

d'où les $\boxed{2 \text{ solutions : } 0 \text{ et } \ln 5}$.

Exercice 2 : (*5 points*) **Complexes et géométrie**

1. Il vient

$$z_1 = 3\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) = 3\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) \quad \text{soit} \quad \boxed{z_1 = \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i}$$

On a alors facilement

$$\boxed{z_2 = \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i} \quad \text{soit} \quad \boxed{z_3 = -\frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i}$$

2. On a évidemment $z_1 = \left[3; \frac{\pi}{6}\right]$. En utilisant les propriétés du conjugué, on a alors $\boxed{z_2 = \left[3; -\frac{\pi}{6}\right]}$.

Pour z_3, on pourrait procéder de la même façon en utilisant le fait que $-1 = [1; \pi]$, puis en utilisant les propriétés de la multiplication de complexes sous forme trigonométrique. Utilisons la méthode choisie par la plupart d'entre vous :

$$|z_3| = \sqrt{\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{27}{4} + \frac{9}{4}} = \frac{6}{2} = 3 \quad \text{d'où} \quad \begin{cases} \cos\theta_3 = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta_3 = -\frac{1}{2} \end{cases} \implies \theta_3 = -\frac{5\pi}{6} \quad \text{convient}$$

Finalement $\boxed{z_3 = \left[3; -\frac{5\pi}{6}\right]}$.

3. *a*) Il vient

$$z_4 = z_1 e^{\frac{2i\pi}{3}} = 3e^{\frac{i\pi}{6}} e^{\frac{2i\pi}{3}} = 3e^{\frac{i\pi}{6}\frac{2i\pi}{3}} = \boxed{3e^{\frac{5i\pi}{6}} = z_1}$$

b) On a bien sûr $\boxed{|z_4| = 3}$ et $\boxed{\operatorname{Arg} z_4 = \frac{5\pi}{6}}$.

c) D'où

$$z_4 = 3\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right) = 3\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) \quad \text{soit} \quad \boxed{z_4 = -\frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i}$$

Exercice 3 : (*11 points*) **Étude d'une fonction comportant un logarithme**

I **1.** On a

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{x+2+\ln x}{x} = -\infty \qquad \text{puisque} \qquad \lim_{x\to 0^+} x = 0^+ \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 0^+} x+2+\ln x = -\infty.$$

Donc $\boxed{\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty}$, ce qui prouve que la droite d'équation $x = 0$ est asymptote verticale à la courbe de f.

2. *a*) En réduisant l'expression proposée au même dénominateur, on vérifie immédiatement que l'on a bien $\boxed{f(x) = 1 + \frac{2}{x} + \frac{\ln x}{x}}$.

b) En utilisant l'écriture précédente, il vient

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} 1 + \frac{2}{x} + \frac{\ln x}{x} \qquad \text{soit} \qquad \boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1}$$

puisque

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2}{x} = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \quad \text{d'après le cours.}$$

c) Le résultat précédent prouve alors que la droite $\boxed{y = 1 \text{ est asymptote horizontale à la courbe de } f}$.

3. *a*) Calculons la dérivée à partir de la première écriture de $f(x)$. Il vient :

$$f'(x) = \frac{(1+\frac{1}{x})\times x - (x+2+\ln x)}{x^2} = \frac{x+1-x-2-\ln x}{x^2} \qquad \text{soit} \qquad \boxed{f'(x) = \frac{-1-\ln x}{x^2}}.$$

b) *c*) Il est clair que $f'(x)$ est du signe de $-1-\ln x$ puisque x^2 est toujours positif. Or

$$-1-\ln x \geqslant 0 \iff -1 \geqslant \ln x \iff e^{-1} \geqslant x$$

d'où le tableau récapitulatif suivant :

x	0		e^{-1}		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$1+e$	$\searrow$	1

où

$$f(e^{-1}) = 1 + \frac{2}{e^{-1}} + \frac{\ln e^{-1}}{e^{-1}} = 1 + 2e - e$$

soit $\boxed{f(e^{-1}) = 1 + e \approx 3,718}$

II **1.** *a*) Il vient

$$\boxed{\lim_{x\to 0^+} g(x) = +\infty} \qquad \text{puisque} \qquad \lim_{x\to 0^+} x+2 = 2 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 0^+} x = 0^+$$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x(1+\frac{2}{x})}{x} = \lim_{x\to+\infty} 1 + \frac{2}{x} \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{\lim_{x\to+\infty} g(x) = 1}$$

b) Avec la formule de la dérivée d'un quotient, on trouve $\boxed{g'(x) = -2/x^2}$, dont le signe est $\boxed{\text{toujours négatif}}$.

c) D'où le tableau récapitulatif suivant :

x	0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1

2. Les limites précédentes nous indiquent deux asymptotes pour la courbe H :

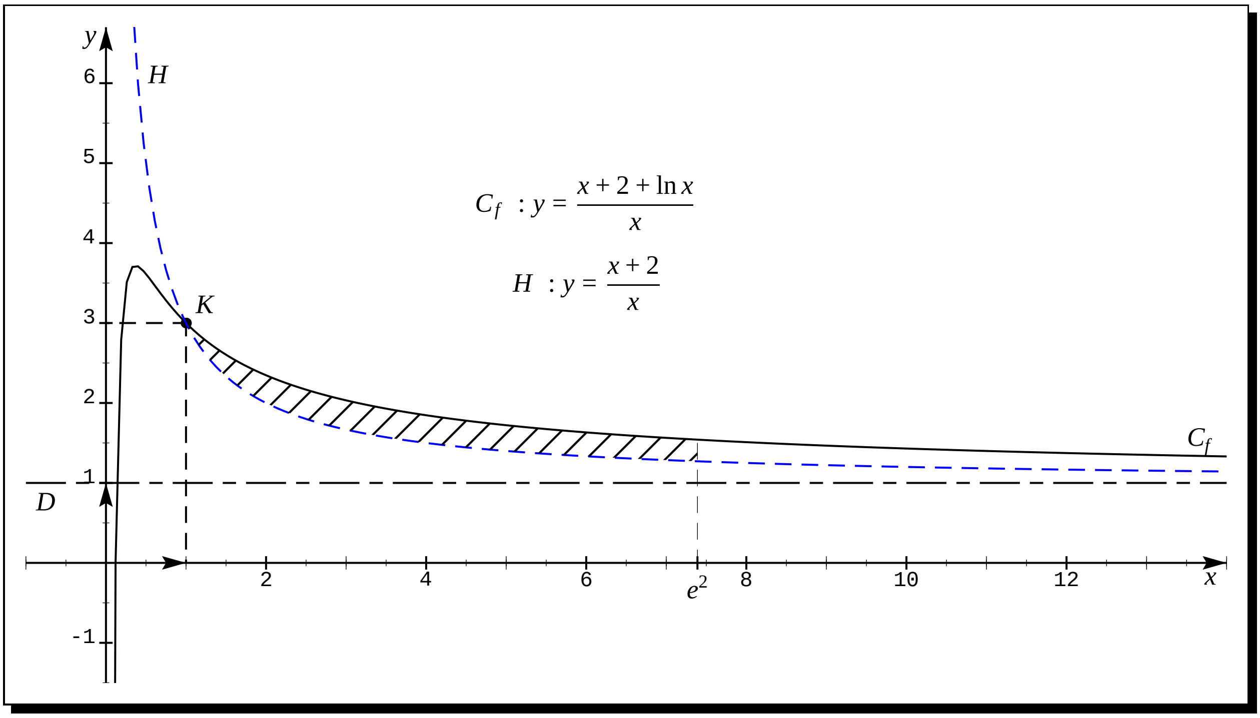
$$\boxed{x = 0 \text{ asymptote verticale}} \qquad \text{et} \qquad \boxed{y = 1 \text{ asymptote horizontale}}$$

3. Il vient facilement $\boxed{f(x) - g(x) = (\ln x)/x}$, qui est du signe de $\ln x$ puisque x est toujours positif sur l'intervalle considéré. Et comme l'étude du signe de cette différence nous donne les positions relatives des courbes C et H, on a le tableau récapitulatif suivant

x	0		1		$+\infty$
$f(x) - g(x)$		$-$	0	$+$	
positions relatives		C au dessous de H		C au dessus de H	

tableau qui nous prouve entre autre que le point K d'abscisse 1 est $\boxed{\text{le seul point d'intersection entre } H \text{ et } C}$.

III **1.**



2. La fonction u est de la forme kU^2, donc sa dérivée est $2kU'U$. Il vient donc

$$u'(x) = \frac{1}{2} \times 2 \times \frac{1}{x} \times \ln x \qquad \text{soit} \qquad u'(x) = \frac{\ln x}{x},$$

ce qui prouve que $\boxed{u \text{ est une primitive de } \dfrac{\ln x}{x}}$.

3. L'unité d'aire est de 2 cm $\times$2 cm $= 4\,\text{cm}^2$. De plus, étant donné que la courbe C est au dessus de la courbe H pour $x > 1$, on a

$$A = 4 \times \int_1^{e^2} f(x) - g(x)\,dx = 4 \times \int_1^{e^2} \frac{\ln x}{x}\,dx = 4 \times \Big[u(x)\Big]_1^{e^2} = 4 \times \Big(u\big(e^2\big) - u(1)\Big) \quad \text{soit} \quad \boxed{A = 8\,\text{cm}^2}$$

puisque $\ln e^2 = 2$ et $\ln 1 = 0$.