Bac blanc STL

durée : 4h

Exercice 1 : (*4 points*) **Coût de revient d'une série de production**

Un objet produit en série a un coût de production de 950 F. Il peut présenter, à l'issue de sa fabrication, un défaut A, un défaut B, ou les deux défauts en même temps. La garantie permet de faire les réparations aux frais du fabricant avec les coûts suivants :

100 F pour le seul défaut A,

150 F pour le seul défaut B,

250 F pour les deux défauts A et B.

1. On prélève un lot de 200 objets. Le défaut A est observé sur 16 objets, le défaut B sur 12 objets et 180 objets n'ont aucun défaut. Reproduire et compléter le tableau suivant :

Nombre d'objets	avec le défaut A	sans le défaut A	Total
avec le défaut B			
sans le défaut B			
Total			200

2. Pour la suite de l'exercice, on admettra que, sur l'ensemble de la production, 90 % des objets n'ont aucun défaut, 4 % ont le seul défaut A, 2 % ont le seul défaut B, et 4 % ont les deux défauts A et B.

On note X la variable aléatoire qui, à chaque objet choisi au hasard dans la production, associe son prix de revient, c'est à dire le coût de production, augmenté éventuellement du coût de réparation.

Présenter cette variable aléatoire et sa loi de probabilité sous la forme d'un tableau. (On pourra reproduire le tableau ci-dessous et le compléter).

Valeurs de X : x_i				1 200
$p(X = x_i)$				

3. *a*) Calculer l'espérance mathématique $E(X)$ et l'écart-type $\sigma(X)$ de cette variable aléatoire. Que représente $E(X)$ pour l'usine ?

On suppose désormais que tous les objets produits sont vendus.

b) L'usine peut-elle espérer faire des bénéfices en vendant 960 F chaque objet produit ?

c) L'usine veut faire un bénéfice moyen de 100 F par objet. Expliquer comment on doit alors choisir le prix de vente de chacun d'eux.

Exercice 2 : (*5 points*) **Complexes et géométrie**

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{u}, \vec{v})$ d'unité graphique 1 cm (ou 1 grand carreau si vous préférez).

1. *a*) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$z^2 - 4z + 16 = 0.$$

On notera z_A et z_B les solutions, z_A étant la solution dont la partie imaginaire est positive.

b) Déterminer le module et un argument des nombres z_A et z_B.

c) Placer dans le plan les points A et B d'affixes respectives z_A et z_B. (On laissera des traces des constructions.)

2. On considère les deux nombres complexes

$$z_C = -4 \qquad \text{et} \qquad z_D = -1 + i\sqrt{3}.$$

a) Calculer le module et un argument de chacun de ces deux nombres complexes.

b) Placer dans le plan complexe les points C et D d'affixes respectives z_C et z_D.

3. *a*) Démontrer que les points A, B et C appartiennent à un même cercle de centre O.

b) Démontrer que D est le milieu du segment $[AC]$.

c) Démontrer que le triangle BDA est rectangle.

d) Démontrer que le triangle ABC est équilatéral.

Exercice 3 : (*11 points*) **Étude d'une fonction comportant un logarithme**

Dans tout le problème, le plan P est rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ d'unité graphique 2 cm.

Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{x + 2 + \ln x}{x}.$$

La courbe représentative C de la fonction f dans le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ est tracée sur la feuille ci-jointe (**à compléter au fur et à mesure et à rendre avec la copie**).

– Partie I – Étude de la fonction f –

1. D'après le graphique, il semble que l'axe des ordonnées soit asymptote à la courbe C. Le prouver par le calcul.

2. *a*) Vérifier que pour tout x de $]0, +\infty[$,

$$f(x) = 1 + \frac{2}{x} + \frac{\ln x}{x}.$$

b) Déterminer la limite de f en $+\infty$.

c) En déduire l'existence d'une asymptote D à la courbe C. Donner son équation et la tracer sur la feuille ci-jointe.

3. *a*) Soit f', la fonction dérivée de la fonction f. Prouver que, pour tout x de $]0, +\infty[$,

$$f'(x) = \frac{-1 - \ln x}{x^2}.$$

b) Étudier le signe de $f'(x)$, et montrer que $f'(x)$ s'annule en changeant de signe en $\frac{1}{e}$.

c) Établir le tableau de variation de f. Dans ce tableau, on donnera la valeur exacte du maximum de f.

– Partie II – Position relative de deux courbes –

1. Soit g la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par

$$g(x) = \frac{x + 2}{x}$$

et H la courbe représentative de g dans le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

a) Calculer les limites de g aux bornes de son intervalle de définition.

b) Soit g' la fonction dérivée de la fonction g. Calculer $g'(x)$ pour $x \in]0; +\infty[$.

c) En déduire le tableau de variation de la fonction g.

2. Donner les équations des deux asymptotes de la courbe H.

3. *a*) Calculer $f(x) - g(x)$ et étudier son signe.

b) Montrer que les deux courbes C et H se coupent en un point K d'abscisse 1.

c) Étudier la position relative des deux courbes C et H.

4. Placer le point K et construire la courbe H sur la feuille ci-jointe.

– Partie III – Calcul d'une aire –

On note A l'aire du domaine plan limité par les courbes C et H et par les droites d'équation $x = 1$ et $x = e^2$.

1. Hachurer l'aire correspondante sur le graphique (feuille ci-jointe) à rendre avec la copie.

2. Soit u la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par

$$u(x) = \frac{1}{2}\left(\ln x\right)^2.$$

Vérifier que u est une primitive de $\frac{\ln x}{x}$ sur $]0, +\infty[$.

3. Calculer A en cm^2.

NOM :

Feuille annexe (à rendre avec la copie)