BTS Mécanique et Automatismes Industriels

Algèbre linéaire

Lycée Louis Armand, Poitiers, Année scolaire 2005/2006

Algèbre linéaire

1. L'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$

L'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$ est certainement le plus connu des espaces vectoriels. Je rappelle ici quelques notions le concernant.

• On note $\mathbb{R}^2$ (ou $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$) l'ensemble des couples (x, y) de nombres réels ($x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$). Traditionnellement, on peut associer à chaque couple (x, y) de $\mathbb{R}^2$ un vecteur du plan, et ce de manière unique si l'on a pris la peine de définir une base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ du plan.

• Si $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$ sont deux vecteurs quelconques non nuls du plan, alors tout vecteur $\vec{u}$ peut s'écrire de manière unique $\vec{u} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$. On dit que $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ est une *base du plan* et que (x, y) est *le couple de coordonnées de $\vec{u}$ dans la base* $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

On dispose de deux opérations sur les éléments de $\mathbb{R}^2$, l'une *interne*, l'addition, qui a lieu entre 2 éléments de $\mathbb{R}^2$ et l'autre *externe*, la multiplication par un scalaire, qui a lieu entre un nombre réel et un élément de $\mathbb{R}^2$.

• *Addition* : si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs de coordonnées respectives (x, y) et (x', y') dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$, alors le vecteur somme de $\vec{u}$ et $\vec{u}'$, noté $\vec{u} + \vec{u}'$, a pour coordonnées $(x + x', y + y')$ dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$. On écrit

$$\vec{u} + \vec{u}' = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \end{pmatrix}$$

• *Multiplication par un scalaire* : si λ est un nombre réel et $\vec{u}$ un vecteur de coordonnées (x, y) dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$, alors le vecteur produit du vecteur $\vec{u}$ par le réel λ, noté $\lambda \cdot \vec{u}$, a pour coordonnées $(\lambda x, \lambda y)$ dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$. On écrit

$$\lambda \cdot \vec{u} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{pmatrix}$$

Lorsqu'il n'y a aucune ambiguïté, on omet souvent le signe $\cdot$ de cette opération, et on écrit $\lambda \cdot \vec{u} = \lambda\vec{u}$. Les vecteurs $\vec{u}$ et $\lambda\vec{u}$ sont dit *colinéaires*.

• L'ensemble $\mathbb{R}^2$, muni de l'addition + et de la multiplication $\cdot$ par un scalaire est appelé *espace vectoriel*. On dit qu'il est de *dimension* 2.

2. L'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$

2.1 - L'ensemble $\mathbb{R}^n$

On note $\mathbb{R}^3$ (ou $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$) l'ensemble des triplets (x, y, z) ou (x_1, x_2, x_3) de nombres réels, et on note $\mathbb{R}^4$ l'ensemble des quadruplets (x_1, x_2, x_3, x_4) de nombres réels. De manière plus générale, pour tout entier naturel n non nul, on note $\mathbb{R}^n$ l'ensemble des n-uplets $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de nombres réels

2.2 - L'addition dans $\mathbb{R}^n$

On définit la somme de deux n-uplets $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ et $(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n)$ par

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x'_1 \\ x_2 + x'_2 \\ \vdots \\ x_n + x'_n \end{pmatrix}$$

On démontre que $\mathbb{R}^n$ muni de cette addition possède, au niveau de cette opération, les mêmes propriétés que l'ensemble des vecteurs du plan, en remplaçant le vecteur nul $\vec{0}$ du plan par le n-uplet $(0, \ldots, 0)$ et en prenant $(-x_1, -x_2, \ldots, -x_n)$ (noté aussi $-(x_1, x_2, \ldots, x_n)$) comme opposé de $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ pour l'addition.

2.3 - Multiplication par un réel

On définit le produit d'un réel λ et d'un n-uplet $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ par

$$\lambda \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix}$$

Là encore, s'il n'y a pas ambiguïté, on omet souvent le signe $\cdot$ de cette opération.

On démontre que $\mathbb{R}^n$ muni de la multiplication par un nombre réel possède, au niveau de cette opération, les mêmes propriétés que l'ensemble des vecteurs du plan muni de la multiplication par un nombre réel.

2.4 - L'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$

On vient de voir que $\mathbb{R}^n$, muni des opérations + et $\cdot$, possède les mêmes propriétés que l'ensemble des vecteurs du plan (ou de l'espace euclidien à 3 dimensions) muni des propriétés + et $\cdot$ analogues. On prolonge cette analogie par le langage utilisé :

L'ensemble $\mathbb{R}^n$, muni de l'addition et de la multiplication par un nombre réel, est appelé *espace vectoriel*. Ses éléments sont appelés *vecteurs*, et on note $\vec{u} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ un élément quelconque de $\mathbb{R}^n$.

Soit n un entier naturel non nul. Pour tout n-uplet $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$, on appelle *combinaison linéaire des vecteurs* $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$, ..., $\vec{u}_n$ le vecteur $\lambda_1\vec{u}_1 + \lambda_2\vec{u}_2 + \ldots + \lambda_n\vec{u}_n$.

3. Base canonique de $\mathbb{R}^n$

3.1 - Exemple

Soit $\vec{u} = (x_1, x_2, x_3)$ un vecteur quelconque de $\mathbb{R}^3$. Si on pose

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \quad \vec{e}_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \quad \vec{e}_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, \quad \text{alors} \quad \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = x_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + x_3\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

En conclusion : tout vecteur de $\mathbb{R}^3$ est combinaison linéaire unique de $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$. On dit que $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

3.2 - Cas général

Soit n un entier naturel non nul. On considère les n vecteurs de $\mathbb{R}^n$

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\\0\end{pmatrix} \quad \vec{e}_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\\vdots\\0\\0\end{pmatrix} \quad \ldots \quad \vec{e}_{n-1} = \begin{pmatrix}0\\\vdots\\0\\1\\0\end{pmatrix} \quad \vec{e}_n = \begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\0\\1\end{pmatrix}$$

Alors tout vecteur $\vec{u} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de $\mathbb{R}^n$ s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire des vecteurs $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$:

$$\vec{u} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \cdots + x_n\vec{e}_n$$

On dit que $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n)$ est *la base canonique de* $\mathbb{R}^n$ et que $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est le *n-uplet de coordonnées de $\vec{u}$ dans la base canonique de* $\mathbb{R}^n$.

4. Applications linéaires

4.1 - Application linéaire de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$

On rappelle que si a est un nombre réel, la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax$ est appelée *application linéaire*. Sa représentation graphique est une droite passant par l'origine du repère. Une telle fonction vérifie en particulier les propriétés suivantes :

- Quels que soit les nombres réels x_1 et x_2, on a

$$f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$$

- Quels que soit les nombres réels λ et x, on a

$$f(\lambda x) = \lambda f(x)$$

Remarque – En fait, les seules applications linéaires de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ sont les fonctions ayant une définition du type $f(x) = ax$ pour un certain réel a.

4.2 - Application linéaire de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^n$

Définition

Une application f de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^n$ est dite *linéaire* si elle vérifie les propriétés suivantes :

- Quels que soit les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de $\mathbb{R}^p$, on a

$$f(\vec{u}+\vec{v}) = f(\vec{u}) + f(\vec{v})$$

- Quels que soit le nombre réel λ et le vecteur $\vec{u} \in \mathbb{R}^p$, on a

$$f(\lambda\vec{u}) = \lambda f(\vec{u})$$

■

Théorème

Une application f de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^n$ est linéaire si et seulement si, quels que soit les réels λ et μ, et quels que soit les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de $\mathbb{R}^p$, on a

$$f(\lambda\vec{u}+\mu v) = \lambda f(\vec{u}) + \mu f(\vec{v})$$

■

4.3 - Caractérisation

Soit $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_p)$ la base canonique de $\mathbb{R}^p$, et f une application linéaire de $\mathbb{R}^p$ vers $\mathbb{R}^n$. Alors l'application f est entièrement déterminée par les images $f(\vec{e}_1)$, $f(\vec{e}_2)$, $\ldots$, $f(\vec{e}_p)$ des vecteurs $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_p)$.

En d'autres termes, si g est une application linéaire de $\mathbb{R}^p$ vers $\mathbb{R}^n$, telle que

$$g(e_i) = f(e_i) \qquad \text{pour tout entier } i,\ 1 \leqslant i \leqslant p \qquad\qquad \text{alors} \qquad f = g.$$

5. Matrice d'une application linéaire

Soit f une application linéaire de $\mathbb{R}^p$ vers $\mathbb{R}^n$. On note $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_p)$ la base canonique de $\mathbb{R}^p$ et $(\vec{\ell}_1, \vec{\ell}_2, \ldots, \vec{\ell}_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. On appelle *matrice de f relativement aux bases canoniques de $\mathbb{R}^p$ et de $\mathbb{R}^n$* le tableau dont les colonnes sont les coordonnées des vecteurs $f(\vec{e}_1)$, $f(\vec{e}_2)$, $\ldots$, $f(\vec{e}_p)$ dans la base canonique $(\vec{\ell}_1, \vec{\ell}_2, \ldots, \vec{\ell}_n)$ de $\mathbb{R}^n$. Cette matrice comporte donc n lignes et p colonnes, on dit que c'est une *matrice* (n, p).

6. Calcul matriciel élémentaire

6.1 - Addition de 2 matrices

Soit $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ deux matrices (n, p) (c'est à dire n lignes et p colonnes). La matrice $A + B = (c_{ij})$ est la matrice (n, p) telle que, pour tout couple d'indices (i, j) vérifiant $1 \leqslant i \leqslant n$ et $1 \leqslant j \leqslant p$, on ait

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}.$$

Par exemple,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 10 & 12 \\ 14 & 16 & 18 \end{pmatrix}$$

6.2 - Produit d'une matrice par un réel

Soit $A = (a_{ij})$ une matrices (n, p) et λ un réel quelconque. La matrice $\lambda \cdot A = (c_{ij})$ est la matrice (n, p) telle que, pour tout couple d'indices (i, j) vérifiant $1 \leqslant i \leqslant n$ et $1 \leqslant j \leqslant p$, on ait

$$c_{ij} = \lambda a_{ij}.$$

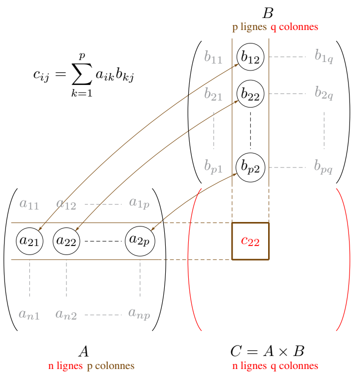
Par exemple,

$$2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 8 & 10 & 12 \end{pmatrix}$$

6.3 - Produit de 2 matrices

Soit $A = (a_{ij})$ une matrices (n, p) et $B = (b_{ij})$ une matrices (p, q). La matrice $A \times B = (c_{ij})$ est la matrice (n, q) telle que, pour tout couple d'indices (i, j) vérifiant $1 \leqslant i \leqslant n$ et $1 \leqslant j \leqslant q$, on ait

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} \left(a_{ik} \cdot b_{kj}\right) = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{ip}b_{pj}.$$



Ainsi, par exemple, on a

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 9 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \times 7 + 2 \times 9 & 1 \times 8 + 2 \times 10 \\ 3 \times 7 + 4 \times 9 & 3 \times 8 + 4 \times 10 \\ 5 \times 7 + 6 \times 9 & 5 \times 8 + 6 \times 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 & 28 \\ 57 & 64 \\ 89 & 100 \end{pmatrix}$$

Remarque – Pour le calcul du coefficient a_{ij}, on utilise donc la $i^{\text{ème}}$ ligne de la première matrice, et la $j^{\text{ème}}$ colonne de la deuxième matrice.

6.4 - Propriétés

On retrouve des propriétés analogues à certaines bien connues dans $\mathbb{R}$: si λ est un réel quelconque et A, B et C trois matrices telles que les opérations ci-dessous aient un sens, on a

- $A \times (B \times C) = (A \times B) \times C$
- $A \times (B + C) = (A \times B) + (A \times C)$
- $A \times (\lambda B) = (\lambda A) \times B = \lambda \cdot (A \times B)$

ATTENTION, la multiplication des matrices n'est pas commutative : on a

$$A \times B \neq B \times A \qquad \text{en général}$$

7. Rappels et compléments sur les équations linéaires

7.1 - Vocabulaire

• Une *équation*, c'est une égalité mathématique comportant des inconnues (ou variables). Suivant les valeurs que l'on donne à ces inconnues, l'égalité peut être *vraie*, *fausse* ou *absurde* (i.e. sans aucun sens)*. Par exemple, les égalités suivantes

$$1 = 1, \qquad 1 = 0, \qquad \frac{1}{0} = 0.$$

sont respectivement vraie, fausse, et absurde.

• *Résoudre une équation dans un ensemble E*, c'est déterminer l'ensemble S des éléments de E tels que l'équation soit vraie. L'ensemble S est appelé *ensemble des solutions* de l'équation.

• Deux équations sont dites *équivalentes* lorsqu'elles ont le même ensemble de solutions.

* en fait, le mathématicien allemand Kurt Gödel (né en 1906) a provoqué une véritable révolution dans le monde des logiciens lorsqu'il a montré, en 1931, qu'une telle égalité peut aussi être *indécidable*. C'est l'histoire de l'*axiome du choix*, bien connu des étudiants en mathématique . . .

7.2 - Équation linéaire à 1 inconnue

On considère l'équation

$$(E) \qquad ax+b=0, \qquad \text{où} \quad (a,b)\in\mathbb{R}^2.$$

Si $a \neq 0$, il est bien connu que cette équation admet une solution unique x_0 définie par $x_0 = a^{-1}b$, où a^{-1} désigne le nombre réel tel que $a \times a^{-1} = 1$.

Si $a = 0$, alors soit l'équation (E) n'admet aucune solution, soit elle en admet une infinité (en fait $\mathbb{R}$ tout entier).

7.3 - Système de 2 équations linéaires à 2 inconnues

On considère le système

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases} \qquad \text{où} \quad (a,b,c)\in\mathbb{R}^3 \quad \text{et} \quad (a',b',c')\in\mathbb{R}^3$$

Une *solution* de ce système est un couple $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ tel que les deux égalités soient vraies simultanément.

Géométriquement, si $(a,b)\neq(0,0)$ et $(a',b')\neq(0,0)$, on peut interpréter ce système comme caractérisant une intersection de droites dans le plan.

• Si $\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} \overset{\text{def}}{=} ab' - a'b \neq 0$, alors le système admet une solution unique. Géométriquement, on est dans le cas de deux droites sécantes.

• Sinon le système possède soit aucune solution, soit une infinité (cas de deux droites parallèles).

Remarque – La plupart de vos calculatrices sont capables de résoudre de tels systèmes lorsqu'ils ont une solution unique. Elles utilisent pour cela le *calcul matriciel*. Par exemple, considèrons le système

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ x + y = 1 \end{cases}$$

qui admet pour solution unique dans $\mathbb{R}^2$ le couple $(x,y)=(1,0)$. En notation matricielle, ce système s'écrit

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

soit $AX = B$ si l'on pose $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
Si $\det A \neq 0$, le système admet alors une solution unique $X = A^{-1}B$.

7.4 - Système de 3 équations linéaires à 3 inconnues

On considère le système

$$\begin{cases} ax + by + cz = d \\ a'x + b'y + c'z = d' \\ a''x + b''y + c''z = d'' \end{cases} \qquad \text{où} \quad (a,b,c,d)\in\mathbb{R}^4, \quad (a',b',c',d')\in\mathbb{R}^4 \quad \text{et} \quad (a'',b'',c'',d'')\in\mathbb{R}^4$$

Une *solution* de ce système est un triplet $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ tel que les trois égalités soient vraies simultanément.

Géométriquement, on peut interpréter ce système comme caractérisant une intersection de plans dans un espace à trois dimensions.

Un tel système possède : soit une solution unique, soit aucune solution, soit une infinité de solutions.

8. Système de m équations linéaires à n inconnues

On appelle *système de m équations linéaires à n inconnues* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ un système de la forme

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & \cdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}\right.$$

où les a_{ij} sont les coefficients et les b_j des constantes. On dit parfois, pour abréger, que c'est un *système* (m, n) (veiller à bien respecter l'ordre des indices : ligne–colonne). Matriciellement, un tel système se note $AX = B$ où

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

• Une solution d'un tel système est un n-uplet $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

• Deux systèmes sont dits *équivalents* si et seulement si ils admettent le même ensemble de solutions.

Propriété : *Résolution d'un système linéaire carré*

Un système linéaire (n, n) admet :

- soit aucune solution,
- soit une solution unique,
- soit une infinité de solutions.

dém : admis.

> **Remarque** – Dans le cas d'un système carré (n, n) quelconque, et comme dans le cas $n = 2$, on retrouve le résultat suivant : si $\det A \neq 0$, le système étudié admet une solution unique X définie par $X = A^{-1}B$. Les calculatrices courantes sont alors capables (en principe) de résoudre le système considéré.

Propriété : *Opérations sur les lignes*

On transforme un système en un système équivalent si :

- on échange deux lignes (notation $L_i \leftrightarrow L_j$),
- on multiplie une ligne par un réel λ non nul (notation $L_i \leftarrow \lambda L_i$),
- on remplace une ligne L_i par la somme de L_i et d'une autre ligne (notation $L_i \leftarrow L_i + L_j$)

dém : admis.

Propriété : *Opérations sur les colonnes*

On transforme un système en un système équivalent si l'on effectue les opérations de la propriété précédente sur les colonnes plutôt que sur les lignes. Les notations deviennent alors respectivement :

$$C_i \leftrightarrow C_j, \qquad C_i \leftarrow \lambda C_i, \qquad C_i \leftarrow C_i + C_j.$$

dém : admis.

Exercices d'algèbre linéaire

Exercice 1 : Application de $\mathbb{R}^3$ vers $\mathbb{R}^2$

On considère l'application de $\mathbb{R}^3$ vers $\mathbb{R}^2$, définie pour tout triplet $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ par

$$f(x, y, z) = (x, y)$$

(f est la projection de l'espace à 3 dimensions sur le premier plan de coordonnées.)

Montrer que l'application f est linéaire.

Exercice 2 : Matrice d'une application de $\mathbb{R}^3$ vers $\mathbb{R}^2$

On considère l'application de $\mathbb{R}^3$ vers $\mathbb{R}^2$, définie pour tout triplet $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ par

$$f(x, y, z) = (x, y)$$

(f est la projection de l'espace à 3 dimensions sur le premier plan de coordonnées.)
Déterminer la matrice de f relativement aux bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$.

Exercice 3 : Application de $\mathbb{R}^3$ vers $\mathbb{R}^2$ — Recherche du noyau

On note $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ et $(\vec{\ell}_1, \vec{\ell}_2)$ les bases canoniques respectives de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$. On note f l'application de $\mathbb{R}^3$ vers $\mathbb{R}^2$ définie par

$$f(x, y, z) = (2y, 2z)$$

1. Démontrer que f est une application linéaire.
2. Déterminer la matrice associée à f relativement aux bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et de $\mathbb{R}^2$.
3. Déterminer l'ensemble des vecteurs de $\mathbb{R}^3$ dont l'image par f est le vecteur nul de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 4 : Calcul simple dans $\mathbb{R}^3$

On pose

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1/2 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \vec{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Calculer

$$\vec{u} + 2\vec{v} - 4\vec{w} \qquad \text{et} \qquad \vec{u} + 4\vec{v} - 15\vec{w}$$

Exercice 5 : Combinaison linéaire de matrices

On pose

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -6 & -5 \end{pmatrix}.$$

Déterminer la matrice $M = 2A - 3B + C$.

Exercice 6 : Produit de matrices

Calculer les produits de matrices suivants.

$a)$ $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\qquad c)$ $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ $\qquad e)$ $\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$b)$ $\begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ $\qquad d)$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ $\qquad f)$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$

Exercice 7 : Produit de matrices — Matrice Identité

On pose

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & -5 & 2 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 7 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 6 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculer les produits de matrices suivants.

$a)\ A \times \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad b)\ \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \times A \qquad c)\ B \times C \qquad d)\ C \times B \qquad e)\ A \times I \qquad f)\ I \times A$

Exercice 8 : De l'utilité du calcul matriciel

On donne les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer les deux nombres réels a et b tels que

$$A = aI + bJ$$

2. Calculer J^2.
3. On suppose que $A = 3I + J$.
   À l'aide des propriétés connues sur le calcul matriciel, montrer que

$$A^2 = 10I + 6J,$$

   et ce **sans calculer sur les coefficients des matrices** A, I et J.

Exercice 9 : Puissances de matrices

Soient les matrices

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -3 & 4 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Calculer M^2 et M^3.
2. Déterminer les nombres réels a et b tels que

$$M^2 = aM + bI.$$

3. Exprimer alors M^3 en fonction de M et de I, puis écrire M^3 sous forme de matrice à 3 lignes et 3 colonnes. Comparer avec le résultat obtenu à la première question.
4. *a*) Déduire de l'égalité trouvée à la deuxième question que l'on peut écrire

$$I = \frac{1}{2}M \times (3I - M).$$

   b) En déduire une matrice P telle que $M \times P = I$.
   c) Écrire P sous forme de matrice à 3 lignes et 3 colonnes.
   d) Calculer $P \times M$.

Exercice 10 : Du calcul...

On considère les matrices

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad B = \begin{pmatrix} b & 1 & 1 \\ 1 & b & 1 \\ 1 & 1 & b \end{pmatrix}$$

Existe-t-il des couples (a, b) de nombres réels tels que $AB = I$, où I désigne la matrice unité ?

Exercice 11 : Application linéaire de $\mathbb{R}^3$ vers $\mathbb{R}^3$

L'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ est muni de sa base canonique $B = (\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.

On considère l'application linéaire f de $\mathbb{R}^3$ vers $\mathbb{R}^3$ définie par

$$f(\vec{\imath}) = 2\vec{\imath} + \vec{\jmath}, \qquad f(\vec{\jmath}) = -\vec{\imath} + 3\vec{\jmath} + \vec{k}, \qquad f(\vec{k}) = \vec{\jmath} - \vec{k}.$$

1. Déterminer la matrice M de f relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
2. Soit $\vec{u} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$ un vecteur quelconque de $\mathbb{R}^3$ et $\vec{u}' = f(\vec{u})$ son image par f.
   a) Exprimer le vecteur $\vec{u}'$ en fonction des vecteurs $f(\vec{\imath})$, $f(\vec{\jmath})$ et $f(\vec{k})$.
   b) En déduire les coordonnées x', y' et z' du vecteur $\vec{u}'$ dans la base B, en fonction de x, y et z.
3. On note U et U' les matrices colonnes formées des coordonnées de $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ respectivement.
   a) Calculer le produit matriciel $M \times U$
   b) En déduire une écriture matricielle du système d'équations linéaires donnant les coordonnées de $\vec{u}'$ en fonction des coordonnées de $\vec{u}$.

Exercice 12 : Application linéaire de $\mathbb{R}^3$ vers $\mathbb{R}^3$

L'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ est muni de la base canonique $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$.

1. On considère la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Calculer M^2.

2. Soit f, l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ de matrice M^2 dans la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$.

a) Déterminer les vecteurs $f(\vec{e}_1)$, $f(\vec{e}_2)$ et $f(\vec{e}_3)$.

b) Soit $\vec{v}(3, 0, 1)$ et $\vec{w}(x, y, z)$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$. Déterminer les trois nombres réels x, y et z tels que l'on ait $f(\vec{v}) = \vec{w}$. (On rappelle que cela implique $M^2 \times V = W$, si V et W sont respectivement les matrices colonnes des coordonnées des vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$).

Exercice 13 : Produit de matrices

On considère les matrices suivantes :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & a & 1 \\ 3 & -a & 8 \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} -9 & 9 & -18 \\ 1 & -1 & 2 \\ 5 & -5 & 10 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

où a est un nombre réel quelconque.

1. Calculer le produit $M \times A$. En déduire le nombre réel a pour lequel on a $M \times A = O$.

2. Calculer le produit $A \times M$ pour la valeur de a obtenue.

Exercice 14 : Système triangulaire, système échelonné

Résoudre dans $\mathbb{R}^4$ les systèmes suivants (en prenant t comme paramètre pour le second système) :

$$\begin{cases} 2x + y - 3z + t = 2 \\ 2y - z + 2t = 1 \\ z - t = 5 \\ t = 3 \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \begin{cases} 2x + y - 3z + t = 2 \\ y - z + t = 2 \\ z + t = 5 \end{cases}$$

Le premier système est dit *triangulaire*, alors que le second est dit *échelonné*.

Exercice 15 : Analyse numérique : systèmes mal conditionnés

Un système de deux équations linéaires à deux inconnues est dit *mal conditionné* lorsque son déterminant est très petit en valeur absolue. Cette notion, relativement récente, est apparue avec le développement du calcul automatique sur ordinateurs. En voici une illustration sur un exemple :

Vérifier que les deux systèmes suivants sont mal conditionnés.

$$\begin{cases} 3x - 7,0001y = 1 \\ 3x - 7y = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} 3x - 7,0001y = 0,9998 \\ 3x - 7y = 1 \end{cases}$$

Pour chacun d'eux, déterminer le couple unique de solutions. Observations ?

Exercice 16 : Système d'équations linéaires et calcul matriciel

On considère les matrices

$$M = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix},$$

où a, b, c, x, y et z sont des nombres réels.

On considère le système d'équations

$$(\mathcal{S}) \qquad \begin{cases} -x - 3y = a \\ x - y = b \\ x + 3y + 2z = c \end{cases}$$

1. Montrer que résoudre le système $(\mathcal{S})$ à trois inconnues réelles x, y et z revient à résoudre l'équation

$$(E) \qquad MX = Y$$

où l'inconnue est la matrice X.

2. *a*) Calculer M^2 et M^3.

b) Exprimer M^3 en fonction de I.

3. *a*) Montrer que l'équation $Y = MX$ est équivalente à l'équation $X = \frac{1}{8}M^2Y$.

b) En déduire la solution de $(\mathcal{S})$.

c) Donner les solutions de $(\mathcal{S})$ lorsque

$$a = 3, \qquad b = -5, \qquad \text{et} \qquad c = -4.$$

Exercice 17 : Interprétation du produit de deux matrices

Sur un chantier de bâtiment, trios entreprises cohabitent : Puigues, Tumez et Sogea. Elles ont besoin, par jour, pour le bon déroulement de leur chantier, de :

	Ciment en tonnes	Sable en m^3	Gravillons en m^3
Pouigues	10	5	5
Tumez	8	3	2
Sogea	7	3	2

Ces renseignements sont présentés sous forme d'une matrice 3×3, appelée matrice des achats, notée M. Ici, on a

$$M = \begin{pmatrix} 10 & 5 & 5 \\ 8 & 3 & 2 \\ 7 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Ces matériaux sont vendus par trois fournisseurs aux prix unitaires indiqués dans le tableau suivant.

	Fournisseur 1	Fournisseur 2	Fournisseur 3
Ciment	400 F	350 F	420 F
Sable	100 F	110 F	90 F
Gravillon	110 F	105 F	100 F

Ces renseignements seront présentés sous forme d'une matrice 3×3, appelée matrice des prix, notée N.
Effectuer le produit $M \times N$. Que représentent les prix obtenus dans chacune des colonnes de la matrice $M \times N$?

Exercice 18 : Problème de production

Une entreprise fabrique des appareils de trois types différents : L, C et V.

Pour un appareil de type L, on a besoin de 10 kg d'acier, 2 kg de peinture et 10 heures de travail.

Pour un appareil de type C, il faut 4 kg d'acier, 1 kg de peinture et 6 heures de travail.

Pour un appareil de type C, il faut 10 kg d'acier, 1 kg de peinture et 12 heures de travail.

On appelle respectivement x, y et z les quantités d'appareil de type L, C et V fabriqués, et a, p, t les quantités d'acier (en kg), de peinture (en kg) et de travail (en heures) nécessaires pour leur fabrication.

1. On considère les matrices

$$M = \begin{pmatrix} 10 & 4 & 10 \\ 2 & 1 & 1 \\ 10 & 6 & 12 \end{pmatrix}, \qquad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \qquad Y = \begin{pmatrix} a \\ p \\ t \end{pmatrix}$$

Montrer que $Y = MX$.

2. On donne la matrice :

$$M' = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 3 & 6 & -3 \\ -7 & 10 & 5 \\ 1 & -10 & 1 \end{pmatrix},$$

a) Calculer le produit $M'M$.

b) En déduire la matrice X en fonction des matrices M' et Y.

3. En déduire les quantités d'appareils de chaque type L, C et V fabriqués en un mois, sachant que 4 200 kg d'acier, 800 kg de peinture et 5 000 heures de travail ont été nécessaires.

Exercice 19 : Programme de production

Une entreprise assure la production de 3 types d'objets A_1, A_2 et A_3 en quantiés (hebdomadaires) respectives x_1, x_2 et x_3.

Un programme de production hebdomadaire s'exprime par un vecteur $\overrightarrow{X} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$.

Par exemple, le programme de production $(10, 20, 30)$ correspond à la production de 10 objets A_1, 20 objets A_2 et 30 objets A_3.

Pour réaliser un programme de production (x_1, x_2, x_3), on utilise y_1 kilogrammes de matière première, y_2 heures de travail et y_3 kilowatts-heures d'ébergie, ce que l'on représente par le vecteur $\overrightarrow{Y} = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$.

On sait que l'application h, de $\mathbb{R}^3$ vers $\mathbb{R}^3$, qui à $\overrightarrow{X}$ associe $\overrightarrow{Y}$ est linéaire.

Sa matrice associée, dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est :

$$H = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{ainsi} \qquad \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

1. Calucler le vecteur $\overrightarrow{Y}$ associé au vecteur $\overrightarrow{X} = (20, 10, 30)$.

2. Déterminer le vecteur $\overrightarrow{X}$ qui a pour vecteur associé le vecteur $\overrightarrow{Y} = (230, 130, 100)$.

Pivot de Gauss

La méthode du pivot de Gauss

La *méthode du pivot de Gauss* (*) est une méthode pour résoudre les systèmes linéaires d'équations.

Plutôt que de me lancer dans de grandes explications sur cette méthode, je préfère vous donner un exemple que vous allez traiter *manuellement*. Il faut savoir que cette méthode est, en général, complètement inadaptée à un tel travail « manuel ». Elle ne commence à prendre tout sons sens que lorsqu'elle est implémentée sur une machine, ce qui permet alors de résoudre *de façon automatique* les systèmes d'équation linéaires dans $\mathbb{R}^n$ (ou $\mathbb{C}^n$).

Exercice 20 : La méthode du pivot de Gauss

Le but de l'exercice est d'appliquer la méthode du pivot de Gauss à la résolution dans $\mathbb{R}^4$ du système

$$(S_0) \qquad \begin{cases} x - y + 2z + t = 1 \\ 2x - 4y + z + t = 6 \\ x - y + z - t = 2 \\ 3x + y + z + 2t = 1 \end{cases}$$

1. *a*) Effectuer les opérations $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$, $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$ et $L_4 \leftarrow L_4 - 3L_1$ pour obtenir le système (S_1).

b) Effectuer la transformation $L_4 \leftarrow L_4 + 2L_2$ pour obtenir le système (S_2).

c) Effectuer la transformation $L_4 \leftarrow L_4 - 11L_3$ pour obtenir le système triangulaire (S_3).

d) Résoudre dans $\mathbb{R}^4$ le système (S_0).

> **Remarque** – Dans la ligne L_1 de (S_0), le coefficient de x s'appelle le *premier pivot*. Dans la ligne L_2 de (S_1), le coefficient de y s'appelle le *deuxième pivot*. Dans la ligne L_3 de (S_2), le coefficient de z s'appelle le *troisième pivot*.

(*) Carl Friedrich Gauss (1777 – 1855) est un très grand mathématicien et physicien allemand. Il publia notamment en 1801, à l'âge de 24 ans, le magistral *Disquisitiones arithmeticae* qui constitue l'acte de naissance de la théorie moderne des nombres. On lui doit également quatre démonstrations distinctes du théorème fondamental de l'algèbre (« *tout polynôme à coefficients complexes admet au moins une racine dans* $\mathbb{C}$ »), ainsi que de nombreux travaux sur les géométries non euclidiennes ou la structure de $\mathbb{R}$.

2. Résoudre, en suivant le principe de la méthode de Gauss, les systèmes

$$(\mathcal{S}) \quad \begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + x_3 - x_4 = 7 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 8 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 2 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 = 1 \end{cases} \qquad \text{et} \qquad (\mathcal{S}') \quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 2 \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 5 \end{cases}$$