# Brevet de Technicien Supérieur

## Session 2006

## Épreuve de mathématiques

durée : 2h

**Spécialités :** Aménagement finition, Assistant technique d'ingénieur, Bâtiment, Charpente couverture, Conception et réalisation de carrosseries, Construction navale, Domotique, Enveloppe du bâtiment : façade–étanchéité, Équipement technique-énergie, Étude et économie de la construction, Géologie appliquée, Industries graphiques : communication graphique, Industries graphiques : productique graphique, Maintenance et après-vente automobile, Maintenance et exploitation des matériels aéronautiques, Mécanique et automatismes industriels, Microtechniques, Moteurs à combustion interne, Productique mécanique, Traitement des matériaux, Travaux publics.

**Exercice 1 :** (*11 points*) **Second ordre, étude locale d'une fonction et intégration**

**Les trois parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.**

### – Partie A - Résolution d'une équation différentielle –

On considère l'équation différentielle

$(E)$ $$y'' - 3y' - 4y = -5e^{-x}$$

où $y$ est une fonction de la variable $x$, définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, $y'$ la fonction dérivée de $y$, et $y''$ sa fonction dérivée seconde.

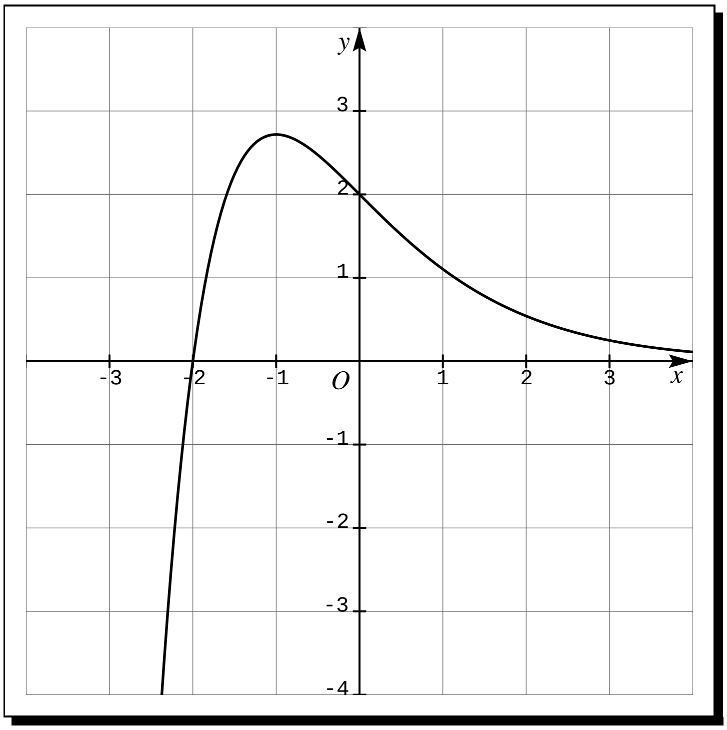
1. Déterminer les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle :

   $(E_0)$ $$y'' - 3y' - 4y = 0$$

2. Soit $h$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = xe^{-x}$.
   Démontrer que la fonction $h$ est une solution particulière de l'équation différentielle $(E)$.
3. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $(E)$.
4. Déterminer la solution $f$ de l'équation $(E)$ qui vérifie les conditions initiales $f(0) = 2$ et $f'(0) = -1$.

### – Partie B - Étude locale d'une fonction –

La courbe $C$ ci-dessous est la représentation graphique, dans un repère orthonormal $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$, de la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x+2)e^{-x}$.



**1.** Démontrer que le développement limité à l'ordre 3, au voisinage de 0, de la fonction $f$ est

$$f(x) = 2 - x + \frac{x^3}{6} + x^3\varepsilon(x) \qquad \text{avec} \qquad \lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0.$$

**2.** Déduire du **1.** une équation de la tangente $T$ à la courbe $C$ au point d'abscisse 0.

**3.** Étudier la position relative de $C$ et $T$ au voisinage du point d'abscisse 0.

## – Partie C - Calcul intégral –

On note $I = \int_0^{0,6} f(x)\,dx$.

**1.** À l'aide d'une intégration par parties, démontrer que $I = 3 - 3,6e^{-0,6}$.

**2.** Donner la valeur approchée arrondie à $10^{-3}$ de $I$.

**3.** Donner une interprétation graphique du nombre $I$.

**Exercice 2 :** (*9 points* ) **Des chaudières... (conditionnelles, loi normale, intervalle de confiance)**

Une entreprise fabrique des chaudières de deux types :

- des chaudières dites « à cheminée »,
- des chaudières dites « à ventouse ».

**Les quatre parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.**

## – Partie A - Ajustement affine –

Le nombre de chaudières fabriquées lors des années précédentes est donné par le tableau suivant :

| Rang de l'année $x_i$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Nombre de chaudières fabriquées : $y_i$ (unité : le millier) | 15,35 | 15,81 | 16,44 | 16,75 | 17,19 | 17,30 |

**1.** À l'aide d'une calculatrice, déterminer :

*a*) le coefficient de corrélation linéaire de la série statistique double de variables $x$ et $y$ ; arrondir à $10^{-2}$ ;

*b*) déterminer une équation de la droite de régression de $y$ en $x$, sous la forme $y = ax + b$, où $a$ sera arrondi à $10^{-3}$ et $b$ sera arrondi à l'unité.

**2.** En supposant que la tendance observée se poursuive pendant deux années, estimer le nombre de chaudières qui seront fabriquées l'année de rang 7.

## – Partie B - Probabilités conditionnelles –

L'entreprse a fabriqué en un mois 900 chaudières à cheminées et 600 chaudières à ventouse. Dans ce lot, 1% des chaudières à cheminées sont défectueuses et 5% des chaudières à ventouse sont défectueuses.

On prélève au hasard une chaudière dans la production de ce mois. Toutes les chaudières ont la même probabilité d'être prélevées.

On considère les événements suivants :

$A$ : « *La chaudière est à cheminée* » ;

$B$ : « *La chaudière est à ventouse* » ;

$D$ : « *La chaudière présente un défaut* ».

**1.** Déterminer $p(A)$, $p(B)$, $p(D|A)$ et $p(B|D)$.

**2.** Calculer $p(D \cap A)$ et $p(D \cap B)$.

**3.** En remarquant que $D = (D \cap A) \cup (D \cap B)$ et que les événements $D \cap A$ et $D \cap B$ sont incompatibles, calculer $p(D)$ et $p(\overline{D})$.

## – Partie C - Loi normale –

Soit $X$ la variable aléatoire qui, à chaque chaudière à cheminée prélevée au hasard dans la production, associe sa durée de fonctionnement en années.

On admet que $X$ suit la loi normale de moyenne 15 et d'écart-type 3.

Une chaudière est dite « amortie » si sa durée de fonctionnement est supérieure ou égale à 10 ans.

Calculer la probabilité qu'une chaudière prélevée au hasard dans la production soit « amortie »; arrondir à $10^{-3}$.

## – Partie D - Intervalle de confiance –

On considère un échantillon de 100 chaudières prélevées au hasard dans un stock important. Ce stock est assez important pour qu'on puisse assimiler ce tirage à un tirage avec remise.

On constate que 94 chaudières sont sans aucun défaut.

**1.** Donner une estimation ponctuelle de la fréquence inconnue $p$ des chaudières de ce stock qui sont sans aucun défaut.

**2.** Soit $F$ la variable aléatoire qui, à tout échantillon de 100 chaudières prélevées au hasard et avec remise dans ce stock, associe la fréquence des chaudières de cet échantillon qui sont sans aucun défaut.

On suppose que $F$ suit la loi normale de moyenne $p$ et d'écart-type $\sqrt{\dfrac{p(1-p)}{100}}$, où $p$ est la fréquence inconnue des chaudières du stock qui sont sans aucun défaut.

Déterminer un intervalle de confiance de la fréquence $p$ avec le coefficient de confiance 95%. Arrondir les bornes à $10^{-2}$.

**3.** On considère l'affirmation suivante : « le fréquence $p$ est obligatoirement dans l'intervalle de confiance obtenu à la question **2.** ».

Est-elle vraie ? (On ne demande pas de justification.)