BTS Mécanique et Automatismes Industriels

Équations différentielles d'ordre 2

Lycée Louis Armand, Poitiers, Année scolaire 2005/2006

Équations différentielles d'ordre 2

1. Définition – Notation

Dans tout ce paragraphe, y désigne une fonction de la variable réelle x. On suppose que cette fonction est 2 fois dérivable sur l'intervalle considéré, et on note respectivement y' et y'' ses dérivées première et seconde.

• Toute équation du type

$$(E) \qquad ay''(x) + by'(x) + cy(x) = d(x).$$

où a, b, c sont des réels quelconques ($a \neq 0$) et où d une fonction de x, est appelée *équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants*. Pour alléger l'écriture, on note généralement

$$(E) \qquad ay'' + by' + cy = d(x).$$

À cette équation différentielle sont associées 2 autres équations :

- • Une autre équation différentielle d'inconnue y, que l'on appelle *équation sans second membre associée à l'équation* (E) (ou encore *équation homogène associée à l'équation* (E)) et que l'on note souvent (E_0) :

  $$(E_0) \qquad ay'' + by' + cy = 0.$$

- • Une équation dans $\mathbb{C}$ (une équation de nombres donc), d'inconnue r,

  $$ar^2 + br + c = 0.$$

  que l'on nomme *équation caractéristique associée à l'équation différentielle* (E)

2. Les principaux théorèmes

Comme dans le cas des équations du premier ordre, on est sûr de l'existence de solutions :

> **Théorème** *existence et unicité de la solution*
>
> Toute équation différentielle linéaire du second ordre (E) admet une solution, et cette solution est unique si on lui impose en plus de vérifier deux conditions initiales données.
>
> ■

Ensuite le théorème qui permet de procéder de façon analogue au premier ordre en décomposant la recherche des solutions en 2 étapes : recherche d'une solution particulière de (E) et recherche de la solution générale de l'équation homogène associée (E_0).

> **Théorème** *résolution d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2*
>
> La solution générale de l'équation
>
> $$(\text{E}) \qquad ay'' + by' + cy = d(x).$$
>
> est obtenue en ajoutant une solution particulière de (E) à la solution générale de l'équation sans second membre (E_0) associée.
>
> ■

Pour résoudre une équation différentielle de ce type, et de façon tout à fait analogue aux équations linéaires d'ordre 1, on procédera donc en trois étapes :

- résolution de l'équation sans second membre associée (E_0);
- détermination d'une solution particulière de l'équation (E);
- conclusion : la solution générale de (E), c'est la solution générale de (E_0) + une solution particulière de (E).

3. Résolution de l'équation sans second membre

On admettra le théorème suivant :

Théorème *Résolution de l'équation linéaire homogène du second ordre*

On considère l'équation

(E_0) $$ay'' + by' + cy = 0.$$

et son équation caractéristique associée $ar^2 + br + c = 0$. Le tableau ci-dessous donne les solutions de (E_0) en fonction du discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$:

	Solutions de l'équation caractéristique associée	Solution générale de (E_0)
$\Delta = 0$	une racine double $r = -\dfrac{b}{2a} \in \mathbb{R}$	$y(x) = (Ax + B)e^{rx}$ où A et B sont des réels arbitraires.
$\Delta > 0$	2 racines réelles $r_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $r_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$	$y(x) = Ae^{r_1 x} + Be^{r_2 x}$ où A et B sont des réels arbitraires.
$\Delta < 0$	2 racines complexes conjuguées $\alpha + i\beta$ et $\alpha - i\beta$ où $\alpha = \dfrac{-b}{2a}$ et $\beta = \dfrac{\sqrt{-\Delta}}{2a}$	$y(x) = e^{\alpha x}(A\cos\beta x + B\sin\beta x)$ où A et B sont des réels arbitraires.

■

Exercices

Exercice 1 : Vérifier qu'une fonction est solution particulière d'une équation différentielle

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par
$$f(x) = 3xe^{-x} + 1.$$

Vérifier si la fonction f est ou non solution de l'équation différentielle

(E) $$y'' + 2y' + y = 0$$

Exercice 2 : Vérifier qu'une fonction est solution particulière d'une équation différentielle

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par
$$g(x) = (2x - 1)e^{-x}.$$

Vérifier si la fonction g est ou non solution de l'équation différentielle

(E) $$y'' + 2y' + y = 0$$

Exercice 3 : Vérifier qu'une fonction est solution particulière d'une équation différentielle

On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par
$$h(x) = 2e^{2x}(1 - 2x)$$

Vérifier si la fonction h est ou non solution de l'équation différentielle

(E) $$y'' - 3y' + 2y = -4e^{2x}.$$

Exercice 4 : Une équation simple

a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation différentielle

$$(E) \qquad y'' + 2y' + y = 0$$

b) Déterminer la solution particulière y de (E) vérifiant en plus les conditions

$$y(0) = 1 \qquad \text{et} \qquad y'(0) = 0$$

Exercice 5 : Une équation simple

a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation différentielle

$$(E) \qquad y'' - 3y' + 2y = 0$$

b) Déterminer la solution particulière y de (E) vérifiant en plus les conditions

$$y(0) = 1 \qquad \text{et} \qquad y'(0) = 0$$

Exercice 6 : Une équation simple

a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation différentielle

$$(E) \qquad y'' + 4y = 0$$

b) Déterminer la solution particulière f de (E) qui vérifie

$$f(0) = 2 \qquad \text{et} \qquad f'(0) = 0$$

c) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation en x : $f(x) = -1$. On représentera les points images de ces solutions sur le cercle trigonométrique.

Exercice 7 : Le second membre est constant

– Partie A –

On considère l'équation différentielle

$$(E) \qquad y'' - 3y' + 2y = 4.$$

1. *a*) Résoudre l'équation différentielle
$$y'' - 3y' + 2y = 0.$$
   b) Déterminer une solution particulière de (E).
   c) En déduire la solution générale de (E).
2. Déterminer la solution particulière de (E) vérifiant les 2 conditions :
$$f(0) = 1 \qquad \text{et} \qquad f'(0) = 2.$$

– Partie B –

Dans un repère orthonormal $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ d'unité 4 cm (ou 4 grands carreaux), on considère C_f, la courbe représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par
$$f(x) = 2 + 3e^{2x} - 4e^{x}.$$

1. Étudier le sens de variation de la fonction f.
2. *a*) Déterminer la limite de f en $+\infty$ (on pourra mettre e^{2x} en facteur dans $f(x)$).
   b) Montrer que la droite Δ d'équation $y = 2$, est asymptote à C_f. Étudier les positions relatives de C_f et Δ.
   c) On note T la droite tangente à C_f au point d'abscisse 0. Calculer le coefficient directeur de T.
3. Sur le même graphique, tracer les courbes Δ, T et C_f.

Exercice 8 : Amortissement

L'étude d'un phénomène d'amortissement conduit à la résolution de l'équation différentielle

$$(E) \qquad y'' + 2y' + 2y = 0$$

où y est une fonction de la variable x, définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

1. *Résolution de l'équation différentielle* (E)

a) Résoudre (E).

b) Déterminer la solution particulière g de (E) satisfaisant aux conditions initiales :

$$g(0) = 0 \qquad \text{et} \qquad g'(0) = 1.$$

2. *Étude d'une solution de* (E) *sur* $[0, \pi]$

Soit f la fonction définie sur $[0, \pi]$ par

$$f(x) = e^{-x} \sin x.$$

a) Établir que : $\cos x - \sin x = \sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$.

En déduire le signe de $(\cos x - \sin x)$ sur $[0, \pi]$.

b) Calculer la dérivée f' de f. En déduire les variations de f sur $[0, \pi]$.

c) Construire C_f, la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal (unités : 5 cm en abscisse, 10 cm en ordonnée).

Exercice 9 : Une suspension de voiture

– Partie A –

La suspension d'une voiture est schématisée par un ressort vertical de force de rappel $k = 1,36 \times 10^4$ Nm^{-1}.

La masse m de la voiture est de 800 kg.

On démontre en mécanique que l'équation du mouvement vertical de cette voiture est de la forme :

$$y'' + \frac{b}{m}y' + \frac{k}{m}y = 0$$

où y désigne l'amplitude de l'oscillation en fonction du temps t, b étant une constante qui peut être choisie égale à 1 600.

1. Résoudre cette équation différentielle.

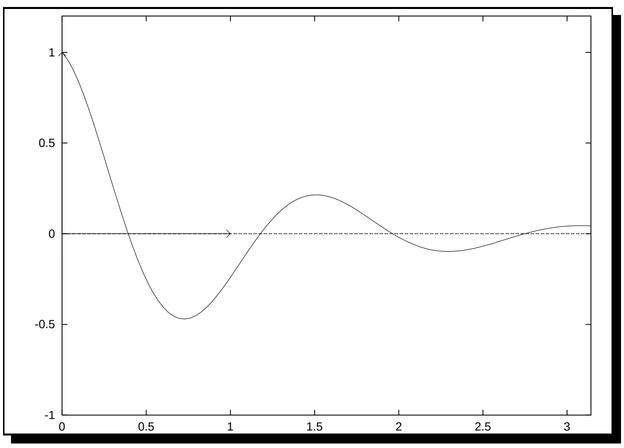
2. Déterminer la solution particulière telle qu'à l'instant $t = 0$, les conditions suivantes soient vérifiées :

$$\begin{cases} y(0) = 1 \\ y'(0) = -1. \end{cases}$$

– Partie B –

On considère la fonction numérique f de la variable réelle t, définie sur $[0, \pi]$ par : $f(t) = e^{-t} \cos 4t$.

La courbe Γ de f est donnée sur la figure ci-dessous



On appelle C_1 et C_2 les courbes représentatives des fonctions f_1 et f_2 définies sur $[0, \pi]$ par :

$$f_1(t) = -e^{-t} \qquad \text{et} \qquad f_2(t) = e^{-t}.$$

1. *a*) Montrer que, pour tout réel t de $[0, \pi]$, on a :

$$-e^{-t} \leqslant f(t) \leqslant e^{-t}.$$

b) En déduire les positions relatives de Γ, C_1 et C_2.

2. *a*) Calculer les *abscisses* des points A et B communs à Γ et C_1.

b) Calculer les *abscisses* des points C, D et E communs à Γ et C_2.

c) Calculer le coefficient directeur de la tangente à Γ en son point d'abscisse 0, ainsi que celui de la tangente à C_2'en son point d'abscisse 0. Que peut-on en conclure ?

3. *a*) Étudier sur $[0, \pi]$ les variations des fonctions f_1 et f_2.

b) Tracer sur un même graphique :

- la courbe représentative de la fonction f,
- les points A, B, C, D, E, ainsi que la tangente à Γ en son point d'abscisse 0,
- les courbes C_1 et C_2.

Exercice 10 : Estampage

Dans une large mesure, les parties **A.**, **B.** *et* **C.** *peuvent être traitées de façon indépendante.*

On veut fabriquer, par estampage, une pièce métallique. Le patron de cette pièce est limité par un domaine plan obtenu à partir de la représentation graphique d'une fonction numérique solution d'une équation différentielle.

– Partie A. – *Résolution d'une équation différentielle*

On considère l'équation différentielle

$$(E) \qquad y'' + 2y' + y = 1$$

où y désigne une fonction de la variable x, définie et deux fois dérivable sur $[0, +\infty[$.

1. Démontrer que la fonction g définie sur $[0, +\infty[$ par $g(x) = 1$ est une solution de (E).

2. Résoudre l'équation différentielle

$$(E_0) \qquad y'' + 2y' + y = 0$$

3. Déduire des questions précédentes la résolution de l'équation (E).

4. Déterminer la solution particulière de l'équation (E) qui vérifie

$$f(0) = 1 \qquad \text{et} \qquad f'(0) = 3.$$

– Partie B. – *Étude d'une fonction numérique*

Soit f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par

$$f(x) = 3xe^{-x} + 1.$$

On note $C_f$la courbe représqentative de la fonction f dans le plazn muni d'un repère orthogonal $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ (unité graphique : 4 cm).

1. Déterminer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$. Interpréter graphiquement le résultat.

2. *a*) Déterminer la fonction f', dérivée de la fonction f.

b) Étudier le signe de f'. En déduire le tableau de variation de f.

3. Soit A, le point de C_f d'abscisse 0. Déterminer une équation de T, la tangente à la courbe C_f en A.

4. Tracer la droite T et la partie de la courbe correspondant à l'intervalle $[0, 4]$.

– Partie C. – *Détermination de l'aire du domaine plan utile à la fabrication de la pièce*

1. On pose
$$I = \int_0^4 3xe^{-x}\,dx.$$
Montrer, en utilisant une intégration par parties, que $I = 15e^{-4} + 3$.

2. *a*) Calculer
$$J = \int_0^4 f(x)\,dx.$$

b) En déduire une valeur décimale approchée à 10^{-2} près par défaut de l'aire $\mathcal{A}$, exprimée en cm^2, du domaine plan limité par les axes de coordonnées, la courbe C_f et la droite d'équation $x = 4$.

Exercice 11 : Le second membre est un polynôme

On considère l'équation différentielle :

$$(E) \qquad y'' - 2y' + 3y = 3x^2 - 1.$$

1. Résoudre l'équation sans second membre
$$(E_0) \qquad y'' - 2y' + 3y = 0.$$

2. Chercher une solution particulière de (E) sous la forme
$$y = ax^2 + bx + c.$$

3. En déduire la solution générale de (E).

4. Déterminer, parmi toutes les solutions de (E), la fonction f dont la courbe $(\mathcal{C})$ est tangente à l'axe Ox en l'origine O.

Exercice 12 : Équation différentielle du second ordre avec un polynôme

– Partie A –

On considère l'équation différentielle

$$(E) \qquad y''(x) + 3y'(x) + 2y(x) = 2x - 5$$

où y est une fonction définie et deux fois dérivable de la variable x.

1. Résoudre l'équation différentielle
$$(E_0) \qquad y''(x) + 3y'(x) + 2y(x) = 0$$

2. *a*) Déterminer les réels a et b tels que la fonction $x \mapsto ax + b$, notée g, soit une solution de (E).

b) En déduire la solution générale de (E).

3. Déterminer la fonction f solution de (E) qui vérifie les conditions initiales
$$f(0) = -\frac{13}{4} \qquad \text{et} \qquad f'(0) = 0.$$

– Partie B –

Soit f la fonction définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par
$$f(x) = x - 4 + \frac{1}{4}e^{-2x} + \frac{1}{2}e^{-x}.$$

On note C_f la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormal $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ d'unité graphique 2 cm.

1. *a*) Déterminer la limite de f en $+\infty$.

b) En remarquant que
$$f(x) = e^{-x}\left(xe^x - 4e^x + \frac{1}{4}e^{-x} + \frac{1}{2}\right)$$

déterminer la limite de f en $-\infty$.

2. *a*) Calculer $f'(x)$ puis $f''(x)$.

b) Montrer que, pour tout x réel, $f''(x) > 0$. En déduire le sens de variations de f'.

c) En remarquant que $f'(0) = 0$, déterminer le signe de $f'(x)$ suivant les valeurs du réel x.

d) Dresser le tableau de variation de la fonction f.

3. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} \big(f(x) - (x-4)\big)$ et montrer que pour tout x réel, l'expression $f(x) - (x-4)$ conserve un signe constant.

Interpréter graphiquement les résultats de cette question.

4. Tracer la droite D d'équation $y = x - 4$ ainsi que la courbe C_f.

Exercice 13 : Second ordre, avec une exponentielle

On considère l'équation différentielle

$$(E) \qquad y'' + 4y' + 3y = e^{-2x}$$

dans laquelle y est une fonction de la variable réelle x, définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

1. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation

$$(E_0) \qquad y'' + 4y' + 3y = 0$$

2. Déterminer une solution particulière de (E) de la forme Ae^{-2x} où A est un réel que l'on déterminera.

3. En déduire l'ensemble des solutions de (E).

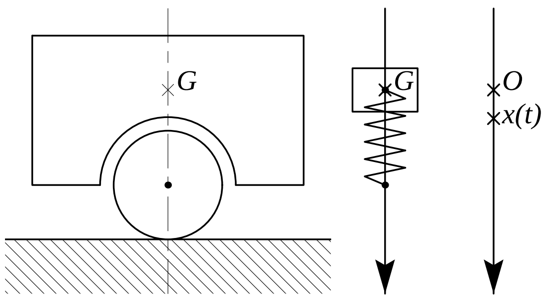
4. Déterminer la solution particulière f de (E) qui vérifie les conditions initiales

$$f(0) = 0 \qquad \text{et} \qquad f'(0) = 0.$$

Exercice 14 : Suspension de remorque, bts mai, *1996*

L'objet de cet exercice est l'étude de la suspension d'une remorque dans les deux cas suivants : système sans amortisseur puis avec amortisseurs.

Le centre d'inertie G d'une remorque se déplace sur un axe vertical$(O,\vec{\imath})$ dirigé vers le bas (unité : le mètre); il est repéré par son abscisse $x(t)$ en fonction du temps t exprimé en secondes. On suppose que cette remorque à vide peut être assimilée à une masse M ($M > 0$) reposant sur un ressort fixé à l'axe des roues.



Le point O est la position d'équilibre occupée par G lorsque la remorque est vide.

La remorque étant chargée d'une masse, on enlève cette masse et G se met alors en mouvement. On considère que $t = 0$ au premier passage de G en O.

– Partie A – Mouvement non amorti –

L'abscisse $x(t)$ de G est alors, à tout instant t, solution de l'équation $Mx''(t) + kx(t) = 0$ où k désigne la raideur du ressort, ce qui peut encore s'écrire :

$$(1) \qquad Mx'' + kx = 0.$$

On prend : $M = 250$ kg et $k = 6\,250$ N.m^{-1}.

Déterminer la solution particulière de l'équation différentielle (1) vérifiant les conditions initiales $x(0) = 0$ et $x'(0) = -0,10$ m.s^{-1}.

Préciser la période de cette solution particulière.

– Partie B – Mouvement amorti –

On équipe la remorque d'amortisseurs de constante d'amortissement λ. L'abscisse $x(t)$ du point G vérifie alors à tout instant t l'équation $Mx''(t) + \lambda x'(t) + kx(t) = 0$, ce qui peut encore s'écrire

(2) $$Mx'' + \lambda x' + kx = 0.$$

On prend : $M = 250$ kg, $k = 6\,250$ N.m^{-1} et $\lambda = 1\,500$ N.s.m^{-1}.

1. *a*) Déterminer dans ces conditions la solution générale de l'équation différentielle (2).

b) Sachant que $x(0) = 0$ et $x'(0) = -0,08$ m.s^{-1}, déterminer la solution particulière de l'équation (2) définissant le mouvement de G.

2. On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0, +\infty[$ par $f(t) = -0,02e^{-3t}\sin(4t)$.

a) Déterminer les valeurs de t appartenant à l'intervalle $[0; 1,5]$ pour lesquelles $f(t) = 0$.

b) Déterminer la dérivée f' de la fonction f.

c) On admet que, pour $a \neq 0$, les équations

$$a\sin\alpha + b\cos\alpha = 0 \qquad \text{et} \qquad \tan\alpha = -\frac{b}{a} \quad \text{(d'inconnue } \alpha\text{)}$$

ont les mêmes solutions.

Déterminer des valeurs approchées à 10^{-2} près des nombres réels t appartenant à l'intervalle $[0; 1,5]$ et annulant $f'(t)$. Pour chaque valeur ainsi obtenue, préciser la valeur correspondante de $f(t)$.

d) Déduire des questions précédentes l'allure de la courbe C_f, représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthogonal. On prendra 10 cm (ou 10 grands carreaux) pour unité en abscisse, et 1 cm (ou 1 grand carreau) pour 0,002 unité en ordonnée.

Exercice 15 : Étude d'un système de sécurité, *bts mai*, *1995*

Principe du fonctionnement (voir schémas ci-dessous).

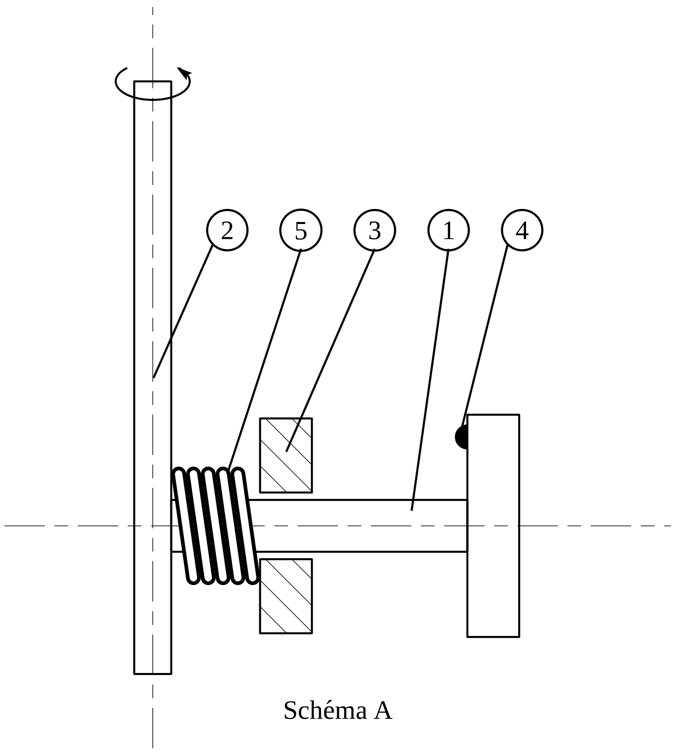


Schéma A

Une tige horizontale (1) de longueur ℓ est solidarisée perpendiculairement à un arbre (2) d'une machine tournant à une vitesse angulaire constante ω. Un ressort (5) de constante de raideur k est fixé par l'une de ses extrémités à l'arbre et par l'autre à un solide (3) de masse M, qui peut coulisser sans frottement sur la tige. Si le solide arrive en butée, il actionne un capteur (4) qui déclenche l'arrêt de la machine (voir schéma A).

Le but de l'exercice est de déterminer le mouvement du point P (voir schéma B).

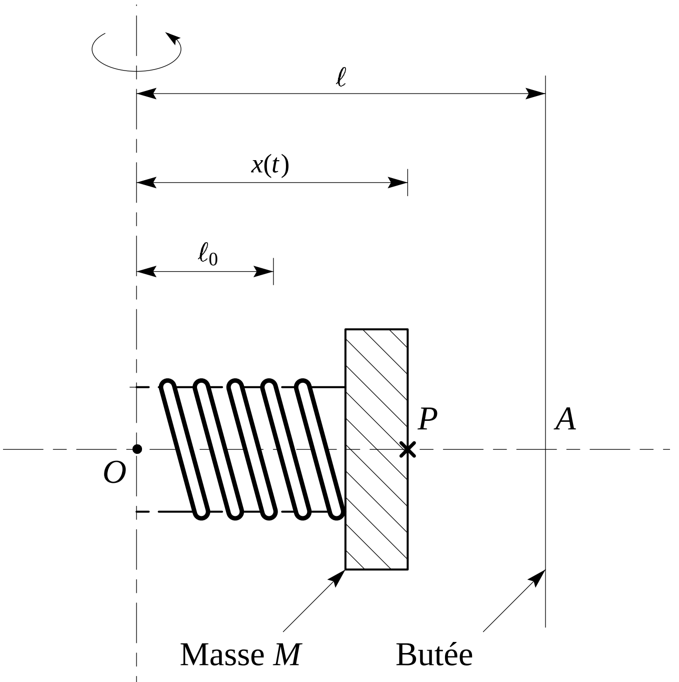


Schéma B

Pour cela, on munit la droite (OA) d'un repère $(O,\vec{\imath})$ où $\overrightarrow{OA} = \ell\vec{\imath}$ (unité : le mètre).

L'unité de temps étant la seconde, la position du point P à l'instant t est alors repérée par son abscisse $x(t)$ dans le repère précédent et l'on a, à tout instant t :

(1) $$\ell_0 \leqslant x \leqslant \ell$$

(2) $$x''(t) + \left(\frac{k}{M} - \omega^2\right) x(t) = \frac{k}{M}\ell_0 \qquad \text{qui s'écrit :} \qquad x'' + \left(\frac{k}{M} - \omega^2\right) x = \frac{k}{M}\ell_0$$

Les contraintes techniques fixent pour tout le problème

$$M = 0,062\,5\,\text{kg} \qquad k = 169\,\text{N.m}^{-1} \qquad \ell_0 = 0,072\text{m} \qquad \ell = 0,12\text{m}$$

D'autre part, pour simplifier l'étude, les conditions initiales sont fixées à $t = 0$: $x(0) = \ell_0$ et $x'(0) = 0$.

Question préliminaire :

Vérifier que l'équation différentielle (2) s'écrit :

(E) $$x'' + (2\,704 - \omega^2)x = 194,688.$$

1. On considère dans cette question que $\omega = 20\,\text{rd}\,.\,\text{s}^{-1}$.

a) Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $x'' + (2\,704 - \omega^2)x = 0$.

b) Déterminer une fonction constante solution de (E). En déduire la forme générale des solutions de (E) puis la solution particulière vérifiant les conditions initiales données.

c) La position du point P est donnée par :

$$x(t) = -0,012\,5\cos(48t) + 0,084\,5.$$

Le point P atteint-il la butée ?

2. On considère maintenant que $\omega = 110,5\,\text{rd}\,.\,\text{s}^{-1}$.

a) En adoptant la même démarche qu'à la question **1.**, montrer que la forme générale des solutions de l'équation (E) est :

$$C_1 e^{97,5t} + C_2 e^{-97,5t} - 0,020\,48$$

puis déterminer la solution particulière x vérifiant les conditions initiales données.

b) Calculer $x(0,01)$ et $x(0,02)$. Interpréter le résultat.

3. On considère enfin que $\omega = 52\,\text{rd}\,.\,\text{s}^{-1}$.

a) Déterminer la solution particulière de l'équation différentielle (E) vérifiant les conditions initiales données.

b) À quel instant le point P atteint-il la butée ?

Exercice 16 : Flambement d'une poutre

On se propose d'étudier la déformation élastique par flambement d'une poutre arquée. On soumet cette poutre à une force longitudinale d'intensité F. On montre que la déformation élastique d qu'elle subit alors est la solution particulière nulle pour $x = 0$ et $x = 1$ de l'équation différentielle

$$(E) \qquad y'' + \omega^2 y = -\omega^2 \sin(\pi x)$$

dans laquelle y désigne une fonction numérique définie sur l'intervalle $[0,1]$, admettant des dérivées première et seconde sur cet intervalle et ω est un nombre réel de l'intervalle $]0,\pi[$ dépendant de F.

> **Remarque** – La phrase précédente signifie en particulier que :
> – d est solution de (E)
> – on a $d(0) = 0$ et $d(1) = 0$.

1. *a*) Donner la solution générale de l'équation sans second membre

$$(E_0) \qquad y'' + \omega^2 y = 0.$$

b) Déterminer le réel k tel que la fonction qui à x fait correspondre $k\sin(\pi x)$ soit solution de l'équation (E).

c) En déduire la solution générale de l'équation (E).

2. Exprimer la déformation élastique d en fonction de ω et de x.

3. *a*) Montrer que la dérormation est maximale pour $x = 1/2$.

b) Exprimer ce maximum en fonction de ω.

c) Interpréter physiquement la situation lorsque ω prend des valeurs proches de π.

Exercice 17 : Une équation différentielle d'ordre 2, *Bts Mécanique et Automatismes Industriels, 2000*

L'objectif de cet exercice est de résoudre une équation différentielle dont une solution particulière est susceptible de définir une fonction de densité en probabilités.

Les parties A. et B. peuvent être traitées de façon indépendante.

– Partie A – Résolution d'une équation différentielle –

On considère l'équation différentielle

$$(E) \qquad y'' - 4y = -\frac{16}{3}e^{-2x}$$

où y est une fonction de la variable réelle x, définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, y' la fonction dérivée de y, et y'' sa fonction dérivée seconde.

1. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle

$$(E_0) \qquad y'' - 4y = 0.$$

2. Vérifier que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = \frac{4}{3}xe^{-2x}$$

est une solution particulière de l'équation différentielle (E).

3. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).

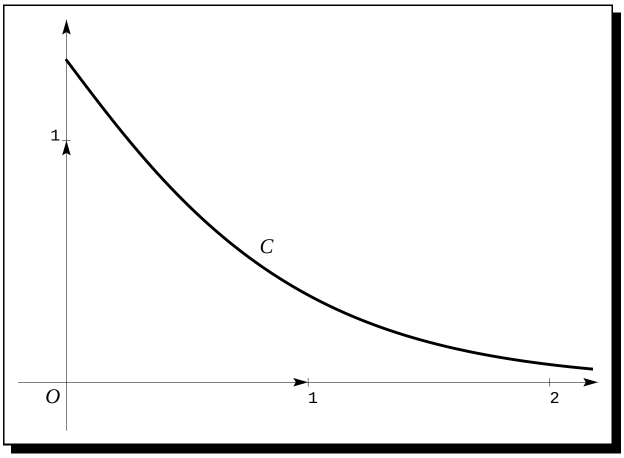
4. Déterminer la solution particulière h de l'équation différentielle (E) vérifiant les conditions

$$h(0) = \frac{4}{3} \qquad \text{et} \qquad h'(0) = -\frac{4}{3}.$$

– Partie B – Étude d'une fonction –

Soit f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{4}{3}(1 + x)e^{-2x}$$



Une représentation graphique C de f, dans un repère orthogonal, est donnée ci-dessus.

1. Le graphique suggère un sens de variation pour la fonction f. L'objet de cette question est de justifier ce résultat.

a) Démontrer que, pour tout x de $[0, +\infty[$,

$$f'(x) = -\frac{4}{3}(2x + 1)e^{-2x}.$$

b) En déduire le sens de variation de f sur $[0, +\infty[$.

2. Le graphique permet d'envisager une asymptote en $+\infty$ pour la courbe C. À partir de l'expression de $f(x)$, déterminer une limite de f justifiant cette propriété graphique.

3. *a*) À l'aide du développement limité au voisinage de 0 de la fonction exponentielle $t \mapsto e^t$, donner le développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 0 de la fonction $x \mapsto e^{-2x}$.

b) En déduire que le développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 0 de la fonction f est :

$$f(x) = \frac{4}{3} - \frac{4}{3}x + \frac{8}{9}x^3 + x^3\varepsilon(x) \qquad \text{avec} \quad \lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0.$$

c) En déduire une équation de la tangente T à la courbe C au point d'abscisse 0 et la position relative de C et t, pour x positif au voisinage de 0.

4. *a*) À l'aide d'une intégration par parties, calculer la valeur exacte de l'intégrale ;

$$I = \int_0^3 f(x)\,dx.$$

Donner une valeur approchée, arrondie au centième, de l'intégrale I.

Donner une interprétation graphique de l'intégrale I.

b) Sur l'écran d'une calculatrice, équipée d'un logiciel particulier (calcul formel), on lit le résultat suivant, où t est un nombre réel positif quelconque :

$$I = \int_0^t f(x)\,dx = \left(-\frac{2}{3}t - 1\right)e^{-2t} + 1.$$

Ce résultat est admis ici et n'a donc pas à être démontré.

Déterminer

$$\lim_{t\to+\infty} \left(-\frac{2}{3}t - 1\right)e^{-2t}.$$

c) Soit $A(t)$ l'aire, en unités d'aire, de la partie du plan limitée par les axes de coordonnées, la courbe C, et la droite d'équation $x = t$ où t est un nombre réel positif.

Déterminer $J = \lim\limits_{t \to +\infty} A(t)$.

d) Déterminer la valeur exacte de $J - I$ où $I = A(3)$ a été calculé à la question **4.***a*), et en déduire la double inégalité : $0 \leqslant J - I \leqslant 10^{-2}$.

Donner, à l'aide d'une phrase, une interprétation graphique de $J - I$.

Exercice 18 : Le second membre est constant

– Partie A –

On considère l'équation différentielle

$$(E) \qquad y'' - 4y' + 3y = 3.$$

1. *a*) Résoudre l'équation différentielle

$$(E_0) \qquad y'' - 4y' + 3y = 0.$$

b) Déterminer le nombre réel a tel que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = a$ soit une solution particulière de (E).

c) En déduire la solution générale de (E).

2. Déterminer la solution particulière de (E) vérifiant les 2 conditions :

$$f(0) = -1 \qquad \text{et} \qquad f'(0) = 2.$$

– Partie B –

Dans un repère orthonormal $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ d'unité 4 cm (ou 4 grands carreaux), on considère C_f, la courbe représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = 1 + 2e^{3x} - 4e^{x}.$$

1. Étudier le sens de variation de la fonction f.

2. *a*) Déterminer la limite de f en $+\infty$ (on pourra mettre e^{3x} en facteur dans $f(x)$).

b) Montrer que la droite Δ d'équation $y = 1$, est asymptote à C_f. Étudier les positions relatives de C_f et Δ.

c) On note T la droite tangente à C_f au point d'abscisse 0. Calculer le coefficient directeur de T.

3. Sur le même graphique, tracer les courbes Δ, T et C_f.

Exercice 19 : Une solution particulière est affine

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

– Partie A –

On considère l'équation différentielle

$$(E) \qquad y'' + 4y' + 4y = -4x$$

où y désigne une fonction inconnue de la variable réelle x, définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

1. Donner la solution générale de l'équation sans second membre associée à (E).

2. Vérifier que la fonction qui à tout réel x associe $-x + 1$ est une solution particulière de (E).

3. Déduire des deux questions précédentes la solution générale de (E).

4. Déterminer la solution φ de (E) dont la courbe représentative passe par le point A de coordonnées $(0, 2)$ et admet en ce point une tangente de coefficient directeur -2.

– Partie B –

Soit f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par

$$f(x) = -x + 1 + (x + 1)e^{-2x}$$

et soit C_f sa courbe représentative dans le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ (unité graphique : 4 cm ou 4 grand carreaux).

1. *a*) Calculer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

b) On pose

$$g(x) = f(x) - (-x + 1).$$

Déterminer le signe de $g(x)$ et déterminer la limite de $g(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

Interpréter graphiquement les résultats obtenus.

2. *a*) Montrer que la dérivée f' de f vérifie

$$f'(x) = -(2x + 1)e^{-2x} - 1.$$

b) En déduire le sens de variation de f sur $[0, +\infty[$, puis construire le tableau de variation de f sur cet intervalle.

3. Construire la droite D d'équation $y = -x + 1$ et la courbe C_f.

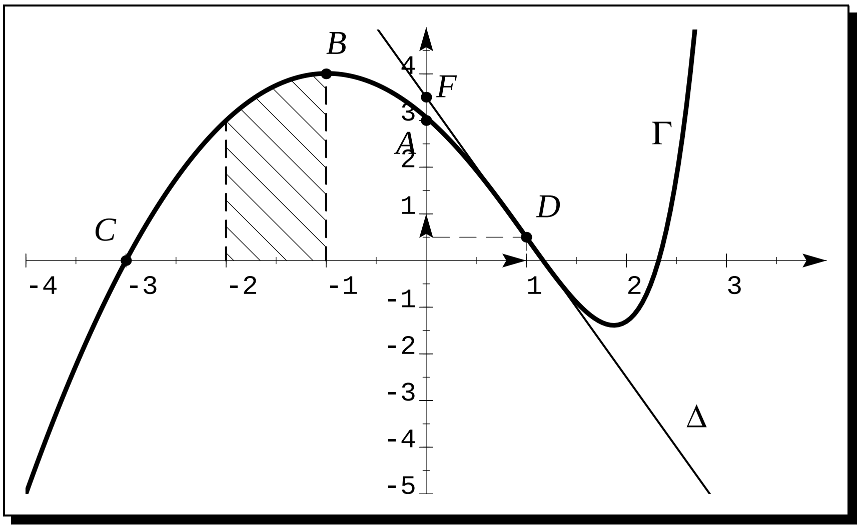
Exercice 20 : La courbe est donnée

Les buts de l'exercice sont :

– *la détermination de la fonction f, définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels, dont la courbe représentative Γ dans un repère orthogonal $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ est tracée ci-dessous (unité graphiques : 2 cm en abscisse, 1 cm en ordonnée).*

– *le calcul de l'aire du domaine hachuré.*

On considère les quatres points $A(0, 3)$, $B(-1, 4)$, $C(-3, 0)$, $D(1\,;0,5)$ de la courbe Γ, ainsi que la droite Δ, tangente à Γ au point D. La droite Δ passe par le point $F(0\,;3,5)$.



A On cherche d'abord une fonction polynôme g, définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = ax^2 + bx + c$, où a, b et c sont trois nombres réels à déterminer pour que la courbe P de g passe par les points A, B et C.

1. *a*) Montrer que la condition « *C appartient à la courbe P* » conduit à l'équation :

$$9a - 3b + c = 0.$$

b) En procédant de même pour A et B, déterminer un système de trois équations à trois inconnues vérifié par a, b, c.

c) Résoudre ce système et vérifier que :

$$g(x) = -x^2 - 2x + 3.$$

2. On désigne par g' la dérivée de g, et par g'' sa fonction dérivée seconde.

Vérifier que, pour tout x appartenant à $\mathbb{R}$,

$$g''(x) - 3g'(x) + 2g(x) = -2x^2 + 2x + 10.$$

B On admet que f, représentée par Γ, est une solution de l'équation différentielle

$$(E) \qquad y'' - 3y' + 2y = -2x^2 + 2x + 10$$

dans laquelle y est fonction de la variable x, définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

1. *a*) Donner une solution particulière de (E).

b) Résoudre l'équation différentielle :

$$(E') \qquad y'' - 3y' + 2y = 0.$$

c) Déterminer la solution générale de (E).

2. Préciser, à l'aide des données initiales, les valeurs de

$$f(1) \qquad \text{et} \qquad f'(1).$$

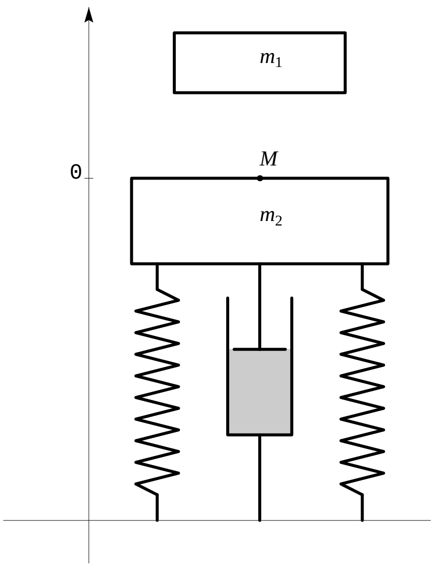
En déduire que, pour tout x appartenant à $\mathbb{R}$,

$$f(x) = -x^2 - 2x + 3 + \frac{1}{2}e^{2(x-1)}.$$

3. Calculer l'aire, en cm^2, du domaine hachuré sur la figure, et défini par $-2 \leqslant x \leqslant -1$ et $0 \leqslant y \leqslant f(x)$.
On donnera la valeur exacte de cette aire, puis sa valeur décimale arrondie au mm^2.

Exercice 21 : Amortissement d'une enclume, *Bts Mécanique et Automatismes Industriels, 1993*

Pour éviter les perturbations crées par les vibrations lors du choc d'un marteau sur une enclume, on munit l'enclume de deux ressorts et d'un amortisseur selon le schéma ci-dessous :



masse du marteau : $m_1 = 1 \times 10^3$ kg
masse de l'enclume : $m_2 = 14 \times 10^3$ kg
constante de raideur d'un ressort : $k = 183 \times 10^4\ \text{Nm}^{-1}$
constante de l'amortisseur : $\mu = 2,4 \times 10^4$ u SI

On suppose qu'après le choc, les deux parties (marteau-enclume) restent solidaires. La cote du point M à l'instant t est repérée par $z(t)$ mesurée sur l'axe indiqué sur le schéma. On choisit l'origine des temps $t = 0$ à l'instant où l'ensemble marteau-enclume arrive au point le plus bas de la première oscillation.

1. La cote $z(t)$ (mesurée en mètres) est solution de l'équation différentielle :

$$(E) \qquad (m_1 + m_2)\frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2} + \mu\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} + 2kz = 0.$$

Soit

$$(E) \qquad 15z'' + 24z' + 3\,660z = 0.$$

a) Donner la solution générale de (E) sous la forme :

$$z(t) = e^{-\alpha t}(A\cos(\beta t) + B\sin(\beta t))$$

en déterminant les valeurs de α et β.

b) Les mesures initiales pour $t = 0$ sont

$$z(0) = -50,7 \times 10^{-3} \qquad \text{et} \qquad z'(0) = 0.$$

Exprimer alors la solution de (E) qui vérifie ces deux conditions en déterminant A et B.

2. La position à l'instant t est maintenant donnée par

$$z(t) = -(50,7\cos(15,6t) + 2,6\sin(15,6t)) \times 10^{-3} \times e^{-0,8t}.$$

a) Déterminer, dans l'intervalle $[0, 1]$ à 10^{-2} près chacun, les instants t pour lesquels $z(t) = 0$.

(*On rappelle que les solutions de l'équation* $\tan x = \tan a$ *sont de la forme* $x = a + n\pi$, *n étant un entier.*)

b) Calculer $\tan(15,6t)$ lorsque $z(t)$ est extrêmal, c'est à dire quand $z'(t) = 0$. En déduire, dans l'intervalle $[0, 1]$, les valeurs approchées correspondantes de t à 10^{-2} près.

c) Tracer, sur une feuille millimétrée, la courbe représentative de z en fonction de t lorsque t varie dans $[0, 1]$.

(Sur l'axe des abscisses, gradué de 0 à 1, 20 cm représenteront une seconde.)

Nota : Le texte ci-dessus correspond au texte d'examen. Ici, vous pouvez prendre une feuille non millimétrée (petits carreaux ou grand carreaux), et les étudiants ayant des feuilles à grands carreaux peuvent prendre comme unité 20 grands carreaux pour une seconde.

Exercice 22 : Mouvement amorti

Les deux parties peuvent se traiter indépendamment l'une de l'autre.

A Lors de l'étude d'un mouvement amorti, on étudie l'équation différentielle :

$$(E) \qquad y'' + 4y' + 4y = 2,$$

où y est une fonction de t, définie et 2 fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

1. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle

$$(E_0) \qquad y'' + 4y' + 4y = 0$$

2. Montrer qu'il existe une fonction constante solution de (E).

3. Donner l'ensemble des solutions de (E).

B On étudie à présent la fonction f définie sur $[0, +\infty[$ par

$$f(t) = \frac{1}{2} + \left(t - \frac{1}{2}\right)e^{-2t}.$$

1. *a*) Déterminer $f(0)$.

b) Déterminer $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t)$. (On rappelle que $\lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{x}{e^x} = 0$.)

2. *a*) Déterminer la dérivée $f'(t)$ de la fonction f.

b) Étudier le signe de la dérivée $f'(t)$.

c) Déduire des questions précédentes le tableau de variation de la fonction f.

3. *a*) Montrer que le développement limité à l'ordre 3 en 0 de la fonction f est :

$$f(t) = 2t - 3t^2 + \frac{8}{3}t^3 + t^3\varepsilon(t) \qquad \text{avec} \qquad \lim_{t\to 0}\varepsilon(t) = 0$$

b) En déduire l'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 0.

4. Soit g la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par

$$g(t) = f(t) - \frac{1}{2} \qquad \text{soit} \qquad g(t) = \left(t - \frac{1}{2}\right)e^{-2t}.$$

Calculer, en utilisant une intégration par parties, l'intégrale

$$I = \int_0^2 g(t)\,dt.$$

Exercice 23 : Problème d'examen, *Bts Mécanique et Automatismes Industriels, 1999*

Les parties **A.** *et* **B.** *peuvent être traitées de façon indépendante*

– Partie A – Résolution d'une équation différentielle –

On considère l'équation différentielle

$$(E) \qquad y'' - 2y' + y = \frac{x^2}{2} - x - 1$$

où y désigne une fonction de la variable x définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, y' la fonction dérivée de y, et y'' sa fonction dérivée seconde.

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation différentielle

$$(E') \qquad y'' - 2y' + y = 0.$$

2. Déterminer les constantes réelles a, b, c pour que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = ax^2 + bx + c$$

soit une solution particulière de l'équation (E)

3. Déduire du **1.** et du **2.** l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).
4. Déterminer la solution f de l'équation (E) qui vérifie les conditions initiales

$$f(0) = 0 \qquad \text{et} \qquad f(1) = e + \frac{3}{2}.$$

– Partie B – Étude d'une fonction –

Soient f et g les deux fonctions de la variable x définies sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = xe^x + \frac{x^2}{2} + x \qquad \text{et} \qquad g(x) = \frac{x^2}{2} + x.$$

On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f et $\mathcal{P}$ la courbe représentative de g dans le repère orthonormal $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ (unité graphique 2 cm).

1. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, et $\lim\limits_{x\to-\infty} [f(x) - g(x)]$.
   Interpréter graphiquement le dernier résultat.
2. Étudier sur $\mathbb{R}$ la position relative des deux courbes $\mathcal{C}$ et $\mathcal{P}$.
3. *a*) Démontrer que pour tout x de $\mathbb{R}$: $\quad f'(x) = (x+1)(e^x + 1)$.
   b) Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$.
4. *a*) Compléter le tableau de valeurs figurant sur la feuille annexe (à rendre avec la copie) ; les valeurs approchées seront arrondies à 10^{-2} près.
   b) Construire la courbe $\mathcal{C}$ dans le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ sur la feuille annexe (à rendre avec la copie) où figure la courbe $\mathcal{P}$.
5. *a*) Démontrer, à l'aide d'une intégration par parties, que la valeur exacte en cm^2 de l'aire de la partie du plan limitée par la courbe $\mathcal{C}$, la parabole $\mathcal{P}$ et les droites d'équations $x = -3$ et $x = -2$ est $A = 4\left(-4e^{-3} + 3e^{-2}\right)$.
   b) Donner une valeur approchée à 10^{-2} près de A.

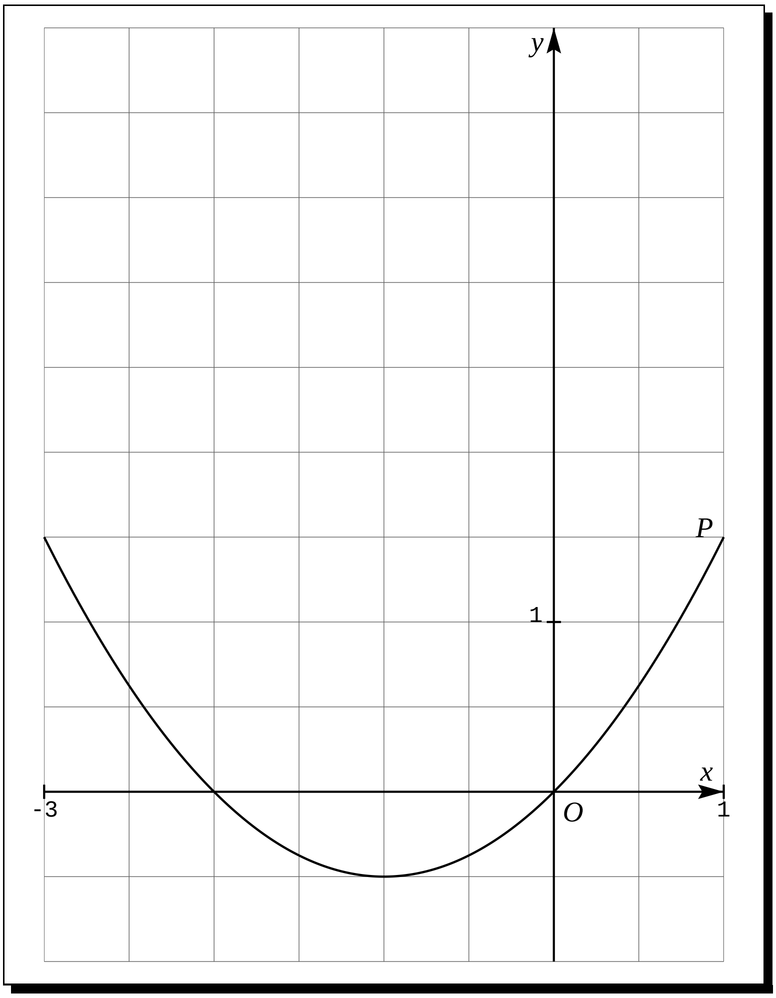
Feuille annexe (à rendre avec la copie)

– Partie B –

4. *a*)

x	-3	$-2,5$	-2	$-1,5$	-1	$-0,5$	0	$0,5$	1
$f(x)$									

b)



Exercice 24 : Équation différentielle linéaire du second ordre

En électronique, l'étude d'un circuit conduit à l'équation différentielle

$$(E) \qquad x'' + 2x' + 2x = 0$$

dans laquelle x désigne une fonction numérique de la variable t, admettant des dérivées première et seconde notées respectivement x' et x''.

1. Résoudre cette équation sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer la solution particulière de cette équation prenant la valeur 0 pour $t = 0$ et dont la dérivée prend la valeur 1 pour $t = 0$.
3. Soit f la fonction numérique telle que, pour tout élément t de l'intervalle $[0, 2\pi]$,

$$f(t) = e^{-t} \sin t.$$

a) Vérifier que, pour tout t réel, on a

$$\cos t - \sin t = \sqrt{2}\cos\left(t + \frac{\pi}{4}\right).$$

b) Étudier les variations de f sur $[0, 2\pi]$ et dresser son tableau de variation.

c) Tracer C_f, la courbe représentative de la fonction f dans le plan rapporté à un repère orthogonal où l'unité vaut 2 cm sur l'axe des abscisses et 10 cm sur l'axe des ordonnées.

4. On se propose de calculer, en cm^2, une valeur approchée par défaut à 1 mm^2 près de l'aire du domaine plan délimité par la courbe C_f, l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite verticale $x = \pi$.

À cette fin, deux méthodes sont proposées :

a) Calculer l'intégrale

$$\int_0^{\pi} f(t)\,dt$$

au moyen de deux intégrations par parties successives.

b) En utilisant l'équation différentielle (E) écrite sous la forme

$$x = -\frac{1}{2}(x'' + 2x'),$$

déterminer une primitive F de f sur $[O, \pi]$.

En déduire l'expression de $\int_0^{\pi} f(t)\,dt$ à l'aide de F.

c) Déterminer une valeur approchée de l'aire considérée à 1 mm^2 près par défaut.

Exercice 25 : Une équation différentielle linéaire d'ordre 2

L'étude d'un système mécanique soumis à un amortissement et à une excitation entretenue, conduit à la résolution de l'équation différentielle suivante où l'inconnue y est fonction du temps t, définie et deux fois dérivable sur $[0, +\infty[$:

$$(E) \qquad y'' + 2y' + 2y = 10\cos 2t.$$

1. Résoudre sur $[0, +\infty[$ l'équation différentielle

$$(E_0) \qquad y'' + 2y' + 2y = 0.$$

2. Montrer que la fonction f définie sur $[0, +\infty[$ par

$$f(t) = 2\sin 2t - \cos 2t$$

est une solution particulière de (E).

3. Résoudre l'équation différentielle (E) sur $[0, +\infty[$.

4. Déterminer la fonction g, solution de l'équation (E) vérifiant les condtions initiales

$$g(0) = 0 \qquad \text{et} \qquad g'(0) = 2.$$

Exercice 26 : Une équation différentielle d'ordre 2

On considère l'équation différentielle

$$(E) \qquad y'' - 2y' + y = x$$

où y désigne une fonction de la variable réelle x, définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

1. Vérifier que la fonction numérique g définie par $g(x) = x + 2$ est solution de l'équation (E) sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels.

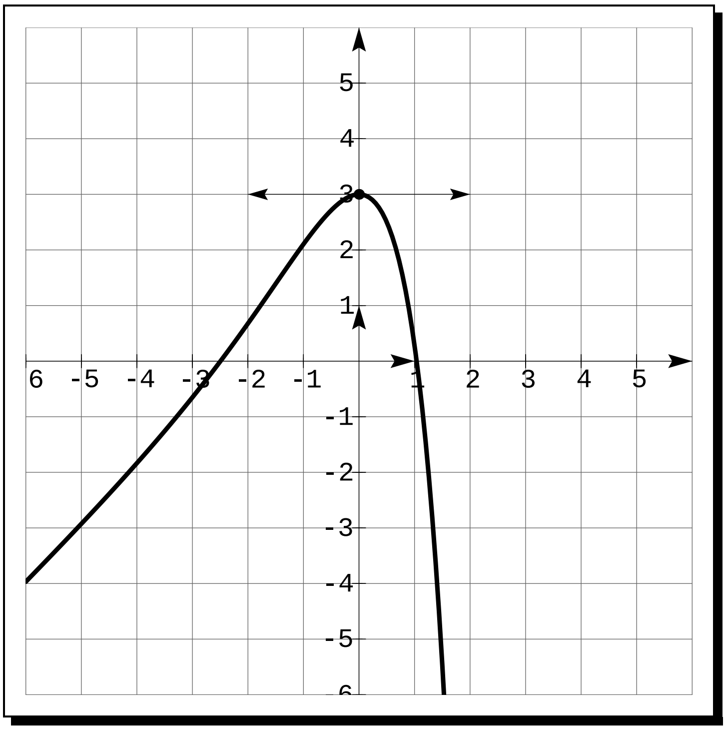
2. *a*) Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle

$$(E_0) \qquad y'' - 2y' + y = 0.$$

b) Déduire des questions précédentes la forme générale des solutions de l'équation (E).

3. La figure ci-dessous donne la courbe représentative C_f dans un repère orthonormal $(0,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ de la fonction f, solution de l'équation (E), définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x + 2 + (1 - 2x)e^x.$$



a) Calculer, pour tout réel x, $f'(x)$ et vérifier que

$$f(0) = 3 \qquad \text{et} \qquad f'(0) = 0.$$

b) Déterminer une équation de la tangente à la courbe C_f au point d'abscisse 0.

c) On note A le point de la courbe C_f dont l'abscisse a vérifie $f''(a) = 0$.

Calculer $f''(x)$ pour tout réel x et en déduire les coordonnées de A (on donnera une valeur approchée de l'ordonnée à 10^{-2} près).

d) En utilisant le graphique, préciser sans calcul le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[-4; 1,5]$. Déterminer graphiquement le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$ sur cet intervalle (justifier).

e) On note α l'unique solution positive de cette équation. À l'aide de la calculatrice, déterminer un encadrement à 10^{-2} près de cette solution α.

Exercice 27 : Équation différentielle d'ordre 2

On considère l'équation différentielle

$$(E) \qquad y'' + 2y' + 17y = 34.$$

1. Déterminer une fonction constante g solution particulière de l'équation (E).

2. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle

$$(E_0) \qquad y'' + 2y' + 17y = 0.$$

3. Déduire des questions précédentes la solution générale de l'équation (E).

4. Déterminer la solution f qui vérifie les conditions initiales

$$f(0) = 3 \qquad \text{et} \qquad f'(0) = -1.$$

Exercice 28 : Équation différentielle, développement limité, relations fonctionnelles

Les 3 parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

– Partie A – Résolution d'une équation différentielle –

On considère l'équation différentielle

(E) $$y'' - y' - 2y = (-6x-4)e^{-x}$$

où y est une fonction de la variable x, définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, y' sa fonction dérivée première et y'' sa fonction dérivée seconde.

1. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle

   (E_0) $$y'' - y' - 2y = 0$$

2. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = (x^2+2x)e^{-x}$.
   Démontrer que h est une solution particulière de l'équation différentielle (E).
3. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation diférentielle (E)
4. Déterminer la solution f de l'équation différentielle E qui vérifie les conditions initiales :

   $$f(0) = 1 \qquad \text{et} \qquad f'(0) = 1.$$

– Partie B – Étude d'une fonction –

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x+1)^2e^{-x}$. Sa courbe représentative C dans un repère orthonormal est donnée sur la figure ci-après.

1. *a*) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

   b) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2e^{-x}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} xe^{-x}$. En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

   c) Interpréter graphiquement le résultat obtenu au *b*).
2. *a*) Démontrer que, pour tout x de $\mathbb{R}$, $f'(x) = (1-x^2)e^{-x}$.

   b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $f'(x) \geqslant 0$.

   c) En déduire le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$.
3. *a*) À l'aide du développement limité au voisinage de 0 de la fonction exponentielle $t \mapsto e^t$, donner le développement limité, à l'ordre 2, au voisinage de 0 de la fonction $x \mapsto e^{-x}$.

   b) Démontrer que le développement limité, à l'ordre 2, au voisinage de 0 de la fonction f est :

   $$f(x) = 1 + x - \frac{1}{2}x^2 + x^2\varepsilon(x) = 0.$$

   c) En déduire une équation de la tangente T à la courbe C au point d'abscisse 0 et la position relative de C et T au voisinage de ce point.

– Partie C – Calcul intégral –

1. *a*) La fonction f définie dans la partie **B** étant une solution de l'équation différentielle (E) :

   $$y'' - y' - 2y = (-6x-4)e^{-x},$$

   montrer que f vérifie, pour tout x de $\mathbb{R}$,

   $$f(x) = \frac{1}{2}\left[f''(x) - f'(x) + (6x+4)e^{-x}\right].$$

   b) Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

   $$F(x) = \frac{1}{2}\left[f'(x) - f(x) - (6x+10)e^{-x}\right].$$

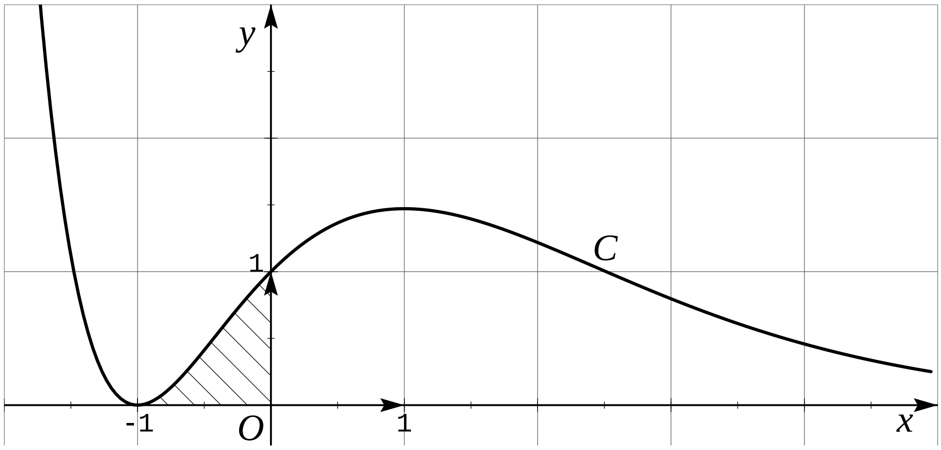
   Montrer que F est une primitive de f.

c) Vérifier que, pour tout x de $\mathbb{R}$,

$$F(x) = (-x^2-4x-5)e^{-x}.$$

2. Utiliser ce qui précède pour démontrer que l'aire A de la partie du plan hachurée sur la figure est, en unité d'aire,

$$A = e - 5.$$



Exercice 29 : Problème d'examen, *Bts Mécanique et Automatismes Industriels, 1997*

– Partie A - résolution d'une équation différentielle –

On considère l'équation différentielle définie sur $\mathbb{R}$ par

(E) $$y'' - 3y' + 2y = -4e^{2x}$$

1. Donner la forme générale des solutions de l'équation (E') : $y'' - 3y' + 2y = 0$.

2. Déterminer le réel a pour que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = axe^{2x}$ soit solution de l'équation (E).

3. *a*) Déduire des questions précédentes la solution générale de l'équation (E).

b) Déterminer la solution f de l'équation (E) dont la courbe représentative passe par le point $S(0, 2)$ et admet en ce point une tangente parallèle à l'axe des abscisses.

– Partie B - étude d'une solution particulière de l'équation différentielle (E) –

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = 2e^{2x}(1 - 2x)$$

On appelle C la représentation graphique de f dans un repère orthonormal $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ d'unité graphique 2 cm.

1. *a*) Étudier la limite de f en $-\infty$.

b) Étudier la limite de f en $+\infty$.

c) En déduire que C admet une asymptote (que l'on précisera). Préciser la position de C par rapport à cette asymptote.

2. Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$.

3. Tracer la courbe C.

4. À l'aide d'une intégration par parties, déterminer l'aire, exprimée en cm^2, du domaine limité par C, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = -2$ et $x = 0$. Donner la valeur de cette aire, arrondie au mm^2.

Exercice 30 : Vitesse angulaire d'un arbre moteur

Un arbre de transmission reçoit son mouvement d'un moteur et commande la marche d'une machine. Le couple N exercé par le moteur n'est généralement pas constant et il peut en résulter un mouvement saccadé de la machine, surtout en basse vitesse.

Le but de l'exercice est de montrer que l'emploi d'un volant de moment d'inertie J important permet de régulariser la vitesse de rotation ω de l'arbre.

On considère que le couple moteur instantané est donné par :

$$N(t) = N_0(t) + N_1 \sin(\alpha t),$$

où N_0, N_1 et α sont des constantes réelles.

Le couple résistant exercé par la machine est supposé proportionnel à ω, soit $-k\omega(t)$, où k est une constante réelle donnée.

La vitesse angulaire $\omega(t)$ de l'arbre est alors solution de l'équation différentielle

$$J\omega'(t) = N_0 + N_1 \sin(\alpha t) - k\omega(t).$$

– Partie A - *Recherche d'une primitive* –

On considère les fonctions numériques g et G de variable réelle t définies de la façon suivante :

$$g(t) = \sin t \cdot e^{t/2} \qquad \text{et} \qquad G(t) = \left[A\cos t + B\sin t\right] \cdot e^{t/2}$$

où A et B sont des constantes réelles.

1. Déterminer A et B pour que G soit une primitive de g.

2. Montrer que G peut s'écrire

$$G(t) = -\frac{2\sqrt{5}}{5}\cos(t+\varphi)e^{t/2}$$

où φ est un nombre réel tel que

$$\cos\varphi = -\frac{2\sqrt{5}}{5} \qquad \text{et} \qquad \sin\varphi = -\frac{\sqrt{5}}{5}.$$

– Partie B - *Résolution d'une équation différentielle* –

1. Avec les valeurs numériques suivantes :

$$J = 10\,\mathrm{kg\,.\,m^2} \qquad N_0 = 20\,\mathrm{N\,.\,m} \qquad N_1 = 1\,\mathrm{N\,.\,m} \qquad \alpha = 1\,\mathrm{rd\,.\,s^{-1}} \qquad \text{et} \qquad k = 5\,\mathrm{N\,.\,m\,.\,s}$$

vérifier que la vitesse angulaire de l'arbre est solution de l'équation différentielle

(E) $$10y'(t) + 5y(t) = 20 + \sin t.$$

2. Résoudre l'équation différentielle

(E_0) $$10y'(t) + 5y(t) = 0.$$

3. *Méthode de la variation de la constante*

On recherche une solution particulière de (E) sous la forme

$$y(t) = Ke^{-t/2}$$

où K est une fonction numérique dérivable.

a) Montrer alors que $K'(t) = 2e^{t/2} + \dfrac{1}{10}g(t)$.

b) En déduire l'expression de $K(t)$ et la solution générale de (E).

– Partie C - *Étude de la vitesse angulaire de l'arbre* –

La vitesse angulaire instantanée $\omega(t)$ de l'arbre est donnée par

$$\omega(t) = 4 + \frac{\sqrt{5}}{25}\cos(t+\varphi) - \frac{98}{25}e^{-t/2}.$$

1. Montrer que pour tout t positif on a

$$-0,99 < \frac{\sqrt{5}}{25}\cos(t+\varphi) < 0,09.$$

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante :

$$\frac{98}{25}e^{-t/2} \leqslant 10^{-2}.$$

On notera I l'intervalle solution.

En déduire que pour t appartenant à I on a

$$3,99 \leqslant 4 - \frac{98}{25}e^{-t/2} < 4.$$

3. Établir alors un encadrement de $\omega(t)$ pour $t \in I$.

Au bout de combien de temps, à partir de l'instant $t = 0$, cet encadrement est-il valable ?