BTS Mécanique et Automatismes Industriels

Équations différentielles d’ordre 1

Lycée Louis Armand, Poitiers, Année scolaire 2005/2006

Équations différentielles d'ordre 1

1. Introduction

Une équation différentielle est une équation dont l'inconnue n'est plus un nombre, mais une fonction. Par exemple, résoudre l'équation différentielle

$$f' = f$$

consiste à rechercher toutes les fonctions égales à leur dérivée.

Pour des raisons historiques, on préfère noter y, au lieu de f, la fonction inconnue. Ainsi, l'équation différentielle ci-dessus est habituellement présentée sous la forme

$$y' = y.$$

2. Définitions – Notations

Dans tout ce paragraphe, a, b et c désignent trois fonctions connues définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, et y désigne la fonction inconnue, définie et dérivable sur l'intervalle I. On suppose de plus que la fonction a ne s'annulle pas sur l'intervalle I (c.à.d. $a(x) \neq 0$ pour tout $x \in I$).

• Toute équation du type

$$a(x)y'(x) + b(x)y(x) = c(x).$$

est appelée *équation différentielle linéaire du premier ordre*. Pour alléger l'écriture, on note généralement

$$(E) \qquad a(x)y' + b(x)y = c.$$

• Une *solution particulière* de cette équation est une fonction f, dérivable sur l'intervalle I, vérifiant

$$a(x)f'(x) + b(x)f(x) = c(x)$$

pour tout x de l'intervalle I. La fonction f est également appelée *intégrale de l'équation différentielle*.

• *Résoudre* l'équation différentielle (E), c'est déterminer l'ensemble des fonctions solutions. On dit encore *déterminer la solution générale* de l'équation (E).

• La représentation graphique d'une solution de cette équation différentielle est appelée *courbe intégrale*.

• L'équation différentielle

$$(E_0) \qquad a(x)y' + b(x)y = 0$$

est appelée *équation « sans second membre » associée à l'équation* (E), ou encore *équation homogène associée à l'équation* (E).

3. Les principaux théorèmes

Tout d'abord, le théorème précisant qu'il n'est pas vain de chercher des solutions.

> **Théorème :** *existence de solutions*
>
> Toute équation différentielle linéaire du premier ordre (E) admet une infinité de solutions.
>
> ∎

Ensuite le théorème qui permet d'imposer à la solution de vérifier une condition initiale particulière.

> **Théorème :** *existence et unicité de la solution*
>
> Toute équation différentielle linéaire du premier ordre (E) admet une solution, et cette solution est unique si on lui impose en plus de vérifier une condition initiale donnée.
>
> ∎

Enfin le théorème qui permet de décomposer la recherche des solutions en 2 étapes : recherche d'une solution particulière de (E) et recherche de la solution générale de l'équation homogène associée (E_0).

Théorème : *résolution d'une équation différentielle linéaire*

La solution générale de l'équation

$$(E) \qquad a(x)y' + b(x)y = c(x).$$

est obtenue en ajoutant une solution particulière de (E) à la solution générale de l'équation homogène (E_0) associée.

■

4. Résolution de l'équation sans second membre

Ce paragraphe donne la méthode générale pour résoudre l'équation sans second membre (E_0) dans le cas d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1 à coefficients non constant.

On a vu en Terminale le théorème suivant :

Théorème :

L'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y' = \alpha y$, où α est un nombre réel fixé, est l'ensemble des fonctions y définies sur $\mathbb{R}$ par

$$y(x) = ke^{\alpha x}$$

où k désigne un réel quelconque.

■

En fait ce théorème se généralise, et on a le

Théorème : *résolution de l'équation homogène*

Soit a une fonction donnée, continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Alors les solutions de l'équation différentielle

$$y' = ay$$

sont toutes les fonctions définies sur I par

$$y(x) = ke^{A(x)}$$

où k désigne une constante réelle quelconque, et où A est une primitive quelconque de la fonction a.

■

5. Un exemple corrigé

On considère l'équation d'inconnue y :

$$(E) \qquad y' - 2xy = 2x$$

La résolution de cette équation passe par 3 étapes :

- *Résolution de l'équation homogène associée*

  On a

  $$(E_0) \qquad y' - 2xy = 0 \iff y' = 2xy.$$

  Avec les notations du théorème précédent, on a $a(x) = 2x$, dont une primitive est la fonction A définie par $A(x) = x^2$. Les solutions de (E_0) sont donc toutes les fonctions y ayant une écriture du type

  $$\boxed{y = ke^{(x^2)} \text{ où } k \text{ constante réelle quelconque}}$$

  Cette expression donne la *solution générale de* E_0.

- *Recherche d'une solution particulière de* (E)

  On remarque que la fonction constante y définie pour tout x par $\boxed{y(x) = -1}$ est une solution particulière de (E). En effet, on a alors $y'(x) = 0$ pour tout x, d'où

  $$y'(x) - 2xy(x) = 0 - 2x \times (-1) = 2x$$

pour tout x. (En général dans les exercices, des indications sont données dans le texte pour vous permettre de trouver une telle solution particulière.)

- *Conclusion : solution générale de* (E)

  On peut alors conclure : l'équation (E) admet une infinité de solutions : toutes les fonctions y ayant une écriture du type

$$\boxed{y(x) = -1 + ke^{(x^2)} \text{ où } k \text{ est une constante réelle quelconque}}$$

Si maintenant on impose à la solution de vérifier une condition initiale donnée, alors on sait qu'il existe une et une seule solution. Il faudra alors déterminer la seule valeur de la constante k possible.

Par exemple, si la solution f doit vérifier l'équation (E), mais aussi la condition $f(0) = 0$, on sera amener à une quatrième étape :

- *solution de* (E) *vérifiant la condition initiale donnée*

  Comme la fonction f est solution de l'équation différentielle (E), on sait que f est définie par une expression du type $f(x) = -1 + ke^{(x^2)}$ pour une certaine valeur de la constante k. Sachant que $f(0) = 0$, il vient la relation $0 = -1 + ke^0$, d'où la seule valeur possible pour la constante : $k = 1$. Finalement la fonction f cherchée est la fonction $\boxed{f(x) = -1 + e^{(x^2)}}$

Exercices

Exercice 1 : Une équation simple

On considère l'équation

$$(E) \qquad y' + y = 3$$

a) Déterminer une solution évidente de cette équation.

b) Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation
$$y' + y = 0.$$

c) En déduire les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation (E)

Exercice 2 : Quelques équations sans second membre

1. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle
$$2y' + y = 0$$

2. Résoudre sur $]0, +\infty[$ l'équation différentielle
$$xy' + y = 0$$

3. a) Déterminer les nombres réels a et b tels que l'on ait, pour tout réel x,
$$\frac{1-x}{1+x} = a + \frac{b}{x+1}.$$

b) Résoudre sur $]-1, +\infty[$ l'équation différentielle
$$(x+1)y' + (x-1)y = 0$$

4. Résoudre sur $]-1, +\infty[$ l'équation différentielle
$$(1+t)x' + (t-1)x = 0$$

Exercice 3 : Une solution particulière est donnée

On se propose de résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation différentielle

$$(E) \qquad y' + y = e^{-x}$$

1. a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation
$$y' + y = 0$$

b) Montrer que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par
$$g(x) = xe^{-x}$$
est une solution particulière de (E).

c) En déduire la solution générale de (E).

2. Déterminer la solution particulière de (E) prenant la valeur 3 en $x = 0$.

Exercice 4 : Vitesse d'écoulement

Une comparaison à un modèle d'écoulement amène à considérer que la vitesse d'écoulement v_0 d'un liquide dans un tube cylindrique est solution de l'équation différentielle

$$4v' + v = 3e^{\frac{x}{2}} - 1$$

avec la condition initiale $v_0 = 0$.

1. Résoudre l'équation différentielle $4v' + v = 0$.
2. Déterminer les constantes A et B pour que la fonction u définie sur $\mathbb{R}$ par

$$u(x) = Ae^{x/2} + B$$

   soit une solution particulière de l'équation (E).
3. Résoudre l'équation (E) sur $\mathbb{R}$.
4. Déterminer la solution particulière vérifiant $v(0) = 0$.

Exercice 5 : Coefficients constants — Trouver le bon polynôme

Les questions **2.** et **3.** sont indépendantes de la question **1.**

1. On considère l'équation différentielle

$$(E) \qquad y'(x) - y(x) = x^2 - x - 1$$

   dans laquelle y est une fonction de la variable x, dérivable sur $\mathbb{R}$, et de fonction dérivée y'.
   a) Déterminer une solution particulière de l'équation (E) sous forme d'un polynôme.
   b) Déterminer la solution générale de l'équation (E).
   c) Quelle est la solution de (E) vérifiant la condition $y(0) = 1$?
2. Soit f, la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = e^x - x^2 - x.$$

   a) Déterminer f' et f'', les dérivées premières et seconde de la fonction f. En déduire le tableau de variation de f'. (On précisera les limites de f' en $-\infty$ et en $+\infty$.)
   b) Déduire de la question précédente que l'équation $f'(x) = 0$ admet deux solutions dont l'une est inférieure à $\ln 2$ et dont l'autre, notée x_0, est supérieure à $\ln 2$.
   c) Montrer que $f(x_0) = -x_0^2 + x_0 + 1$.
   d) Construire, dans un repère orthonormé (unité : 2 cm ou 2 grands carreaux), la courbe C et la droite D d'équations respectives

$$y = e^x \qquad \text{et} \qquad y = 2x + 1.$$

   e) Déduire du **2.***a*) que C et D ont deux points communs
   f) Quelle est la plus petite des solutions de l'équation $f'(x) = 0$?
   g) Montrer qu'une valeur approchée à $0,01$ prés de x_0 est $\alpha = 1,25$.
3. *a*) Calculer les limites de la fonction f en $+\infty$ et en $-\infty$.
   b) Étudier les variations de la fonction f.
   c) Tracer, sur un second graphique (muni d'un repère orthonormal de même unité que précédemment) :
   • la parabole P d'équation $y = -x^2 - x$
   • la courbe Γ représentant la fonction f. (On prendra pour valeur approchée de $f(x_0)$ une valeur approchée de $f(\alpha)$ à $0,1$ près).

Exercice 6 : Équation à coefficients non constants

On considère l'équation différentielle

$$y' + xy = x^2 e^{-x}$$

où y est une fonction de la variable x, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée y'.

a) Résoudre l'équation différentielle

$$(E_0) \qquad y' + xy = 0$$

b) Déterminer deux nombres réels a et b tels que la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = (ax + b)e^{-x}$ soit une solution particulière de (E).

c) Déduire des questions précédentes la solution générale de l'équation (E).

Exercice 7 : Équation à coefficients non constants

On considère l'équation différentielle

$$(E) \qquad (x^2 + 1)y' + 3xy = 0$$

où y est une fonction de la variable x, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée y'.

a) Résoudre l'équation différentielle (E)

b) Déterminer la solution particulière de (E) qui vérifie $f(0) = 1$.

Exercice 8 : Équation à coefficients non constants

On veut résoudre sur $]-1; +\infty[$ l'équation différentielle

$$(E) \qquad (1 + x)y' - 2y = \ln(1 + x).$$

1. Résoudre sur $]-1; +\infty[$ l'équation différentielle

$$(E_0) \qquad (1 + x)y' - 2y = 0$$

2. Vérifier que la fonction g définie sur $]-1; +\infty[$ par

$$g(x) = -\frac{1}{2}\ln(1 + x) - \frac{1}{4}$$

   est une solution de (E).

3. Déduire des questions précédentes la solution générale de l'équation (E).
4. Déterminer la solution particulière de (E) qui vérifie la condition initiale $f(0) = 0$.

Exercice 9 : Équation à coefficients non constants

On considère l'équation différentielle

$$(E) \qquad (x^4 + 1)y' - x^3 y = x^5 - x^3 + 2x + 1.$$

1. Déterminer une fonction polynôme de degré 2, solution de l'équation (E).
2. Déterminer la solution générale de l'équation (E).

Exercice 10 : Équation différentielle avec une exponentielle

Partie A – On considère l'équation différentielle

(E) $$y' + y = 1 - e^{-x}$$

où l'inconnue y est une fonction de la variable x, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, et où y' est la fonction dérivée de y.

1. Résoudre l'équation différentielle

   (E_0) $$y' + y = 0$$

2. Déterminer une fonction numérique u définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que la fonction définie par

   $$x \mapsto y_0 = u(x)e^{-x}$$

   soit solution de (E)
3. Déterminer l'ensemble des solutions de (E).
4. Déterminer la solution particulière g de (E) vérifiant la condition initiale $g'(0) = 0$.

Partie B – Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = 1 - (x+1)e^{-x}$$

et C sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, unité : 2 cm.

1. Déterminer les limites de g en $-\infty$ et en $+\infty$. En déduire l'existence d'une asymptote D pour C.
2. Étudier les variations de la fonction g.
3. Construire la droite D et la courbe C après avoir déterminé les coordonnées d'une dizaine de ses points à l'aide d'une calculatrice programmable.
4. *a*) À l'aide d'une intégration par parties, calculer l'intégrale

   $$I = \int_{-1}^{2} (x+1)e^{-x}\,dx$$

   b) En déduire l'aire $\mathcal{A}$, en cm^2, de la partie du plan limitée par C, D et la droite d'équation $x = 2$.

   c) Donner un encadrement de $\mathcal{A}$ d'amplitude 10^{-2}.

Exercice 11 : Équation différentielle du premier ordre à coefficients constants

Les deux parties sont indépendantes

Partie A - L'objectif de cette partie est la résolution de l'équation différentielle

(E) $$y' + y = e^{-x}$$

où y est une fonction, définie sur $\mathbb{R}$, de la variable x, et y' la dérivée de y.

1. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle

   (E_0) $$y' + y = 0$$

2. Déterminer le nombre réel a tel que la fonction g définie par $g(x) = axe^{-x}$ soit solution de (E).
3. Donner les solutions de l'équation (E) sur $\mathbb{R}$.
4. Déterminer la fonction f, solution de (E), qui vérifie $f(0) = 1$.

Partie B - L'objectif de cette partie est l'étude d'une fonction.
Soit f la fonction de la variable réelle x définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = (x+1)e^{-x}.$$

1. Déterminer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
2. Étudier les variations de la fonction f.
3. Construire la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ (unités graphiques : 1 cm sur Ox et 10 cm sur Oy). *Note* : pour les unités graphiques, on pourra utiliser des grands carreaux plutôt que des cm.

Exercice 12 : Équation différentielle du premier ordre à coefficients non constants

On considère l'équation différentielle

$$(E) \qquad xy' - y = -x^2e^{-x}$$

où y est une fonction de la variable x, définie et dérivable sur $]0, +\infty[$, et où y' est la dérivée de y.

1. Vérifier que la fonction s, définie sur l'intervalle $]0, +\infty[$ par $s(x) = xe^{-x}$ est solution de l'équation (E).
2. Résoudre sur $]0, +\infty[$ l'équation différentielle

$$(E_0) \qquad xy' - y = 0$$

3. Résoudre l'équation différentielle (E) sur $]0, +\infty[$.
4. Déterminer la solution particulière g de (E) sur $]0, +\infty[$ vérifiant la condition $g(1) = 1 + \frac{1}{e}$

Exercice 13 : Équation différentielle du premier ordre avec un cosinus

On considère l'équation différentielle

$$(E) \qquad 3x' - 2x = -20\cos 2t$$

où l'inconnue x est une fonction de la variable réelle t, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, et où x' est la fonction dérivée de x.

1. *a*) Résoudre l'équation différentielle

$$(E_0) \qquad 3x' - 2x = 0$$

   b) Déterminer une solution particulière de (E) sous la forme

$$x(t) = A\cos 2t + B\sin 2t.$$

   c) Résoudre l'équation (E).
2. Déterminer la solution particulière f de (E) vérifiant la condition initiale $f(0) = 0$.

Exercice 14 : Équation du premier ordre à coefficients non constants

L'objectif de cette partie est la résolution de l'équation différentielle

$$(E) \qquad -xy' + 2y = 4x + 12$$

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation différentielle

$$(E_0) \qquad -xy' + 2y = 0$$

2. Déterminer les constantes réelles a et b pour que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = ax + b$$

   soit une solution particulière de l'équation différentielle (E).
3. En déduire la solution générale de (E).

Exercice 15 : Équation du premier ordre à coefficients constants

On considère l'équation différentielle

$$(E) \qquad x' - 4x = 2e^{3t}$$

où l'inconnue x est une fonction de la variable réelle t, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, et où x' est la fonction dérivée de x.

1. Résoudre l'équation différentielle

$$(E_0) \qquad x' - 4x = 0$$

2. Déterminer une solution particulière h de (E) sous la forme $h(t) = ae^{3t}$ où a est une constante réelle à déterminer.
3. En déduire la solution générale de (E).
4. Déterminer la solution particulière f de (E) vérifiant la condition initiale $f(0) = 0$.

Exercice 16 : La solution particulière est une fonction affine

On considère l'équation différentielle du premier ordre

$$(E) \qquad xy' + (x-1)y = x^2.$$

où y est une fonction de la variable réelle x, définie et dérivable sur $]0,+\infty[$, et y' sa dérivée première.

1. Déterminer deux nombres réels a et b tels que la fonction affine g définie par $g(x) = ax + b$ soit solution de (E).
2. Résoudre l'équation sans second membre
$$(E_0) \qquad xy' + (x-1)y = 0.$$
3. En déduire la solution générale de (E).
4. Déterminer la solution particulière f_1 telle que : $f_1(1) = (e+1)/e$.

Exercice 17 : La solution particulière est une fonction exponentielle

On considère l'équation différentielle

$$(E) \qquad xy' - 2(x+1)y = 2e^{2x}$$

où y est une fonction de la variable réelle x, définie et dérivable sur $]0,+\infty[$, et y' sa dérivée première.

1. Résoudre sur $]0,+\infty[$ l'équation différentielle
$$(E_0) \qquad xy' - 2(x+1)y = 0.$$
2. Déterminer le réel α tel que la fonction g définie par $g(x) = \alpha e^{2x}$ soit solution de (E).
3. En déduire, sur $]0,+\infty[$, la solution générale de (E).
4. Déterminer la solution f de (E) vérifiant $f(1) = -3e^2/4$.

Exercice 18 : Équation sans second membre

On considère l'équation différentielle

$$(E) \qquad (1+x^2)y' + 2xy = 0$$

où y est une fonction de la variable réelle x, définie et dérivable sur $]0,+\infty[$, et y' la fonction dérivée de y..

1. Résoudre sur $]0,+\infty[$ l'équation différentielle (E).
2. Déterminer la solution f de (E) vérifiant $f(0) = 1$.

Exercice 19 : Éqution différentielle, intégration : un problème de synthèse

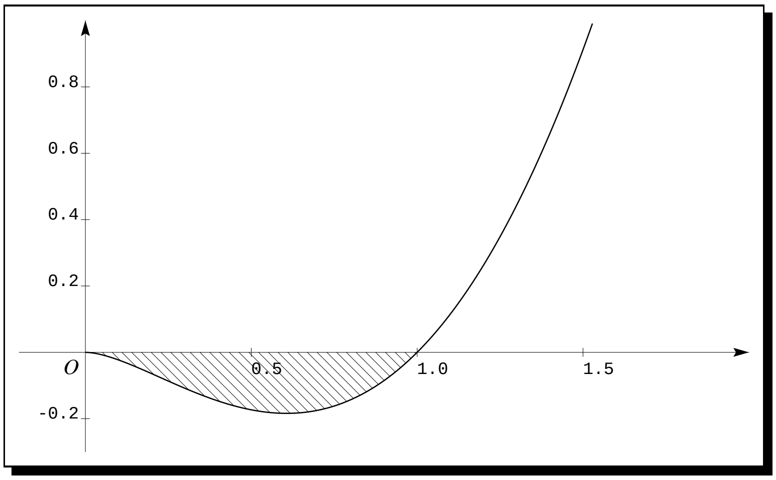
On considère, sur $]0,+\infty[$, l'équation différentielle

$$(E) \qquad y' - 2\frac{y}{x} = x$$

où y représente une fonction de la variable réelle x, définie et dérivable sur $]0,+\infty[$, de dérivée première y'.

1. *a*) Résoudre sur $]0,+\infty[$ l'équation
$$(E_0) \qquad y' - 2\frac{y}{x} = 0.$$
   b) Rechercher une solution particulière de (E) sous la forme
$$y(x) = \alpha x^2 \ln x.$$
   où α est une constante réelle à déterminer.
   c) Donner la solution générale de (E).
   d) Déterminer la solution de (E) dont la représentation graphique passe par le point $A(1,0)$.
2. On définit sur $]0,+\infty[$ la fonction f par :
$$f(x) = x^2 \ln x.$$

La représentation graphique de la fonction f dans le plan muni d'un repère orthogonal (unités graphiques : 32 mm sur Ox et 40 mm sur Oy) est donnée ci-dessous :



a) Calculer $f'(x)$.

b) Étudier les limites de la fonction f en 0 et en $+\infty$.

c) Étudier les variations de la fonction f et résumer les conclusions dans un tableau.

3. *a*) En effectuant une intégration par parties, calculer

$$I(\lambda) = \int_{\lambda}^{1} x^2 \ln x \, dx$$

où λ est un réel tel que $0 < \lambda \leqslant 1$.

b) Déterminer $\lim\limits_{\lambda \to 0} I(\lambda)$.

c) En déduire l'aire, en mm^2, de la partie du plan hachurée sur la figure ci-dessus.

Exercice 20 : Calcul d'un moment d'inertie, *Bts maintenance industrielle***,** 1996

Les parties **I** *et* **II** *peuvent être traitées indépendamment l'une de l'autre.*

– Partie I - Résolution d'une équation différentielle –

On considère l'équation différentielle

(E) $$(1 + t^2)x' + 2tx = 0$$

où l'inconnue x est une fonction de la variable réelle t, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, et où x' est la fonction dérivée de x.

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation différentielle (E).

2. Déterminer la fonction f, solution particulière de l'équation (E), vérifiant $f(0) = 1$.

– Partie II - Calcul intégral –

On pose

$$A = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\,dt, \qquad B = \int_0^1 \frac{t}{1+t^2}\,dt, \qquad \text{et} \qquad C = \int_0^1 \frac{t^2}{1+t^2}\,dt,$$

1. *a*) Montrer que $A = \dfrac{\pi}{4}$.

b) Montrer que $B = \dfrac{1}{2}\ln 2$.

2. *a*) Vérifier que, pour tout nombre réel t, on a

$$\frac{t^2}{1+t^2} = 1 - \frac{1}{1+t^2}.$$

b) Déduire du **1.** la valeur exacte de C.

– Partie III - Application –

Dans un repère orthonormal $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, on considère la courbe représentative $\mathcal{C}$ de la fonction f définie sur $[0, 1]$ par

$$f(t) = \frac{1}{1+t^2}.$$

Une plaque homogène est délimitée par l'axe des abscisses, la courbe $\mathcal{C}$ et les droites d'équations $t = 0$ et $t = 1$.
Le moment d'inertie de cette plaque par rapport à la droite d'équation $t = 1$ est donné par

$$M = \int_0^1 (1-t)^2 f(t)\, dt.$$

1. Montrer que $M = A - 2B + C$.

2. À l'aide de la partie **II**, calculer la valeur exacte puis une valeur approchée à 10^{-3} près de M. (Le tracé de la courbe $\mathcal{C}$ n'est pas demandé.)

Exercice 21 : Méthode de la « variation de la constante »

Le but de l'exercice est la résolution de l'équation différentielle

$$(E) \qquad x(x^2+1)y' - 2y = x^3(x-1)^2 e^{-x},$$

où y représente une fonction de la variable réelle x, dérivable sur l'intervalle $]0, +\infty[$ et où y' est la fonction dérivée de y.

1. *a*) Déterminer les trois nombres réels a, b et c tels que pour tout réel x de l'intervalle $]0, +\infty[$:

$$\frac{2}{x(x^2+1)} = \frac{a}{x} + \frac{bx+x}{x^2+1}.$$

b) En déduire une primitive sur l'intervalle $]0, +\infty[$ de la fonction

$$x \mapsto \frac{2}{x(x^2+1)}.$$

2. Résoudre sur l'intervalle $]0, +\infty[$ l'équation différentielle

$$(E_0) \qquad x(x^2+1)y' - 2y = 0.$$

3. On se propose de déterminer une fonction g dérivable sur l'intervalle $]0, +\infty[$ telle que la fonction h définie par

$$h(x) = \frac{x^2}{x^2+1} g(x)$$

soit une solution particulière de l'équation (E).

a) Montrer que, pour qu'il en soit ainsi, on doit avoir

$$g'(x) = (x-1)^2 e^{-x}.$$

b) Déterminer les nombres réels α, β et γ tels que la fonction $x \mapsto (\alpha x^2 + \beta x + \gamma)$ soit une primitive sur l'intervalle $]0, +\infty[$ de la fonction

$$x \mapsto (x-1)^2 e^{-x}.$$

c) En déduire une solution particulière de l'équation (E) puis la solution générale de l'équation (E).

Exercice 22 : Le parachute, Bts Mécanique et Automatismes Industriels, *1991*

La trajectoire suivie par un objet relié à un parachute est un axe vertical noté $(O, \vec{\imath})$.

À un instant donné, le vecteur vitesse $\vec{V}$ de l'objet est défini par $\vec{V}(t) = v(t)\vec{\imath}$ où v est une fonction de la variable réelle positive t.

Dans ces conditions de l'expérience, le vecteur $\vec{R}$ représentant la résistance de l'air est défini par $\vec{R} = -k\vec{V}$ où k est un nombre réel strictement positif.

On admet que la fonction v vérifie l'équation différentielle

$$(1) \qquad mv'(t) + kv(t) = mg$$

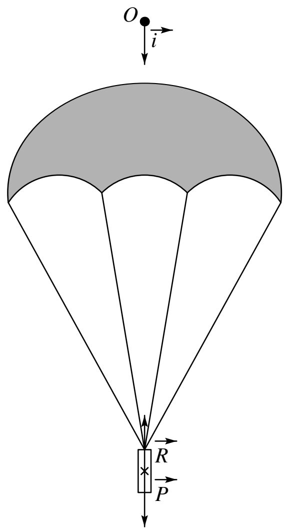
où m est la masse totale de l'objet et du parachute et g le coefficient de l'accélération de la pesanteur.

1. *a*) Montrer qu'il existe une fonction constante, solution particulière de (1);

b) Montrer que les fonctions solutions de (1) sont définies pour tout nombre réel positif t par :

$$v(t) = Ce^{-\frac{k}{m}t} + \frac{mg}{k}$$

où C est une constante réelle dépendant des conditions de l'expérience.



2. Dans la suite du problème on prendra $m = 8$ kg, $g = 10$ ms^{-2} et $k = 25$ unités SI.

a) Donner la fonction particulière v_1 solution de l'équation différentielle (1) correspondant à une vitesse initiale $v(0) = v_0$ de 5 ms^{-1}.

b) Donner la fonction particulière v_2 solution de l'équation différentielle (1) correspondant à une vitesse initiale nulle.

c) Montrer que les fonctions v_1 et v_2 ont la même limite d lorsque t tend vers $+\infty$.

d) Donner la solution particulière v_3 solution de l'équation différentielle (1) correspondant à une vitesse initiale $v(0) = w_0$ de $3,2$ ms^{-1}.

e) Tracer soigneusement les courbes C_1, C_2 et C_3 représentant respectivement les fonctions v_1, v_2 et v_3 dans un repère orthogonal $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, où l'unité graphique est de 4 cm sur l'axe Ox, et 2 cm sur l'axe Oy.

Exercice 23 : Évolution d'une température en chimie

Les questions **1.** *et* **2.** *sont indépendantes.*

1. On note $y(t)$ la température en degrés Celsius d'une réaction chimique en fonction du temps t, t étant exprimé en heures.

Après étude, on constate que la température est solution de l'équation différentielle

$$(E) \qquad y' + y = e^{-0,25t}$$

avec la condition initiale $y(0) = 20$.

a) Résoudre sur $[0, +\infty[$ l'équation

$$(E_0) \qquad y' + y = 0$$

b) Déterminer le nombre réel k tel que la fonction g définie par $g(t) = ke^{-0,25t}$ soit une solution particulière de l'équation (E).

c) En déduire la solution générale de (E).

d) Déterminer la solution de (E) satisfaisant la condition initiale.

2. On considère la fonction f définie sur $[0, +\infty[$ par

$$f(t) = \frac{1}{3}\left(56e^{-t} + 4e^{-0,25t}\right).$$

a) Étudier la limite de f quand t tend vers $+\infty$.

b) Déterminer la fonction dérivée de f.

c) Étudier le signe de $f'(t)$ pour $t \in [0, +\infty[$. En déduire le tableau de variation de f.

d) Dans le plan rapporté à un repère orthogonal $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ (unités graphique : 2 cm ou 2 grand carreaux pour 1 h sur l'axe des abscisses, et 1 cm ou 1 grand carreau pour 1 degré sur l'axe des ordonnées) représenter graphiquement la fonction f.

Exercice 24 : Équation différentielle d'ordre 1

On considère l'équation différentielle

$$(E) \qquad y - xy' = x^2 + 1.$$

1. Résoudre (E_0), l'équation sans second membre associée à l'équation (E).

2. Déterminer une solution particulière g de (E). (On pourra chercher g sous la forme d'un polynôme du second degré $g(x) = ax^2 + bx + c$.)

3. Résoudre l'équation (E).

Exercice 25 : Un problème de synthèse

L'objectif de cet exercice est d'étudier la solution f définie sur $\mathbb{R}$, de la variable x, de l'équation différentielle :

$$(E) \qquad y' + y = (2x + 3)e^{-x}$$

vérifiant la condition initiale $f(0) = 1$.

– Partie A - Résolution de l'équation différentielle –

1. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle

$$(E_0) \qquad y' + y = 0$$

2. Vérifier que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = (x^2 + 3x)e^{-x}$$

est une solution particulière de l'équation différentielle (E).

3. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle (E).

4. Déterminer la solution f de cette équation qui vérifie la condition initiale $f(0) = 1$

– Partie B - Étude de la solution f –

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (x^2 + 3x + 1)e^{-x}.$$

On note C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O, \vec{\imath}\vec{\jmath})$ (unité graphique : 1 cm).

1. *Étude des variations de la fonction f*

a) Déterminer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

b) Étudier le sens de variation de f et établir son tableau de variation.

2. *Position relative de la courbe et de sa tangente au voisinage du point A d'abscisse* 0.

a) Déterminer l'équation de la tangente T à la courbe C_f au point A d'abscisse 0.

b) Écrire le développement limité d'ordre 2 de f au voisinage de 0. En déduire la position relative de C_f et de T au voisinage du point A.

c) Tracer C_f et T dans le repère $(O, \vec{\imath}\vec{\jmath})$.

3. *Calcul d'une aire*

a) À l'aide d'une intégration par parties, déterminer une primitive de la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$h(x) = (2x+3)e^{-x}.$$

b) En se rappelant que la fonction f est une solution de l'équation différentielle (E) et vérifie donc

$$f'(x) + f(x) = (2x+3)e^{-x}$$

et en utilisant le résultat de la question précédente, déterminer une primitive de f.

c) Pour tout nombre réel $\alpha > 0$, on pose :

$$I(\alpha) = \int_0^{\alpha} f(x)\, dx.$$

Calculer $I(\alpha)$. Déterminer la limite de $I(\alpha)$ lorsque α tend vers $+\infty$. Donner une interprétation graphique de ces résultats.

Exercice 26 : Désintégration du Thorium 227

Le but du problème est l'étude de la désintégration d'un corps radioactif, le Thorium^{227} qui donne du Radium^{223}, lequel se désintègre à son tour en donnant du Radon^{219}.

À l'instant $t = 0$, on isole N_0 atomes de Thorium. On note $R(t)$ le nombre d'atomes de Radium à l'instant t pour $t \in [0, +\infty[$. À l'instant $t = 0$, il n'y a aucun atome de Radium. On admet que la fonction $R(t)$ est la solution sur $[0, +\infty[$ de l'équation différentielle

$$(E) \qquad y' + 0,062y = 0,038N_0 \cdot e^{-0,038t}$$

qui vérifie la condition initiale $R(0) = 0$.

1. a) Montrer que la fonction y_1 définie sur $[0, +\infty[$ par

$$y_1(t) = \left(\frac{19}{12}\right) N_0 \cdot e^{-0,038t}$$

est une solution de (E).

b) Déterminer dans $[0, +\infty[$ la solution générale y_0 de l'équation sans second membre (E_0) associée à l'équation (E).

c) En déduire la solution générale y de (E)

d) Déterminer alors la fonction R.

2. On considère la fonction f définie sur $[0, +\infty[$ par

$$f(t) = e^{-0,038t} - e^{-0,062t}.$$

a) Déterminer la limite de f en $+\infty$.

b) Montrer que

$$f'(t) = e^{-0,038t}\big(-0,038 + 0,062e^{-0,024t}\big).$$

c) On note t_0 la solution de l'équation $f'(t) = 0$. Donner la valeur exacte de t_0 puis une valeur approchée à 10^{-1} près. Justifier alors le signe de $f'(t)$ suivant les valeurs de t.

d) Donner le tableau de variation de f.

3. Donner l'expression de $R(t)$ en fonction de $f(t)$. En déduire le tableau de variation de R.

Exercice 27 : Équation différentielle et étude de fonction, bts mai, *juin 2001*

Les trois parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

– Partie A – *Résolution d'une équation différentielle* –

On considère l'équation différentielle

$$(E) \qquad y' - 2y = e^{2x}$$

où y est une fonction de la variable réelle x, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et y' sa fonction dérivée.

1. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle :

$$(E_0) \qquad y' - 2y = 0.$$

2. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = xe^{2x}$.
   Démontrer que h est une solution particulière de l'équation différentielle (E).
3. Déterminer la solution générale de l'équation (E).
4. Déterminer la solution particulière f de l'équation (E) qui vérifie la confition $f(0) = -1$.

– Partie B – *Étude d'une fonction* –

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x-1)e^{2x}$.
Sa courbe représentative C est donnée dans le repère de l'annexe (à rendre avec la copie).

1. *a*) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.
   b) On admet que $\lim\limits_{x \to -\infty} xe^{2x} = 0$. En déduire $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.
   c) Interpréter géométriquement le résultat obtenu au *b*).
2. *a*) Démontrer que, pour tout x de $\mathbb{R}$, $f'(x) = (2x-1)e^{2x}$.
   b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $f'(x) \geqslant 0$.
   c) En déduire le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$.
3. *a*) À l'aide du développement limité au voisinage de 0 de la fonction exponentielle $t \mapsto e^t$, donner le développement limité, à l'ordre 3, au voisinage de 0 de la fonction $x \mapsto e^{2x}$.
   b) En déduire que le développement limité, à l'ordre 3, au voisinage de 0 de la fonction f est :

$$f(x) = -1 - x + \frac{2}{3}x^3 + x^3\varepsilon(x) \qquad \text{avec} \qquad \lim_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0.$$

   c) En déduire une équation de la tangente T à la courbe C au point d'abscisse 0 et la position relative de C et T au voisinage de ce point.
   d) Tracer T dans le repère de l'annexe.

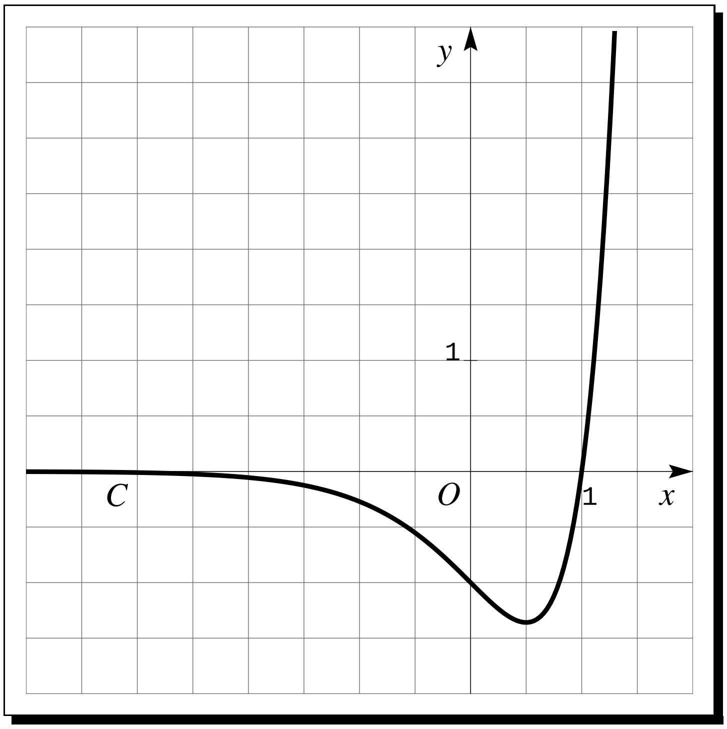
– Partie C – *Calcul intégral* –

1. Soit α un réel strictement négatif ; on pose $I(\alpha) = \displaystyle\int_\alpha^0 f(x)\,dx$.
   Démontrer que

$$I(\alpha) = -\frac{3}{4} - \left(\frac{1}{2}\alpha - \frac{3}{4}\right)e^{2\alpha}.$$

   On pourra effectuer une intégration par parties.
2. *a*) Calculer la limite de $I(\alpha)$ quand α tend vers $-\infty$.
   b) À l'aide d'une phrase, donner une interprétation graphique de ce résultat.

Annexe


y
1
C
O
1
x