BTS Mécanique et Automatismes Industriels

Fiabilité

Lycée Louis Armand, Poitiers, Année scolaire 2003/2004

Fiabilité

1. Premières notions de fiabilité

Dans tout ce paragraphe, nous nous intéressons à un dispositif choisi au hasard dans une population constituée des dispositifs du même type.

On désigne par T la variable aléatoire qui, à tout dispositif choisi au hasard dans la population, associe son *temps de bon fonctionnement* ou sa durée de vie avant une défaillance.

Pour simplifier, l'origine des temps $t = 0$ est choisie lorsque le dispositif est mis en marche pour la première fois.

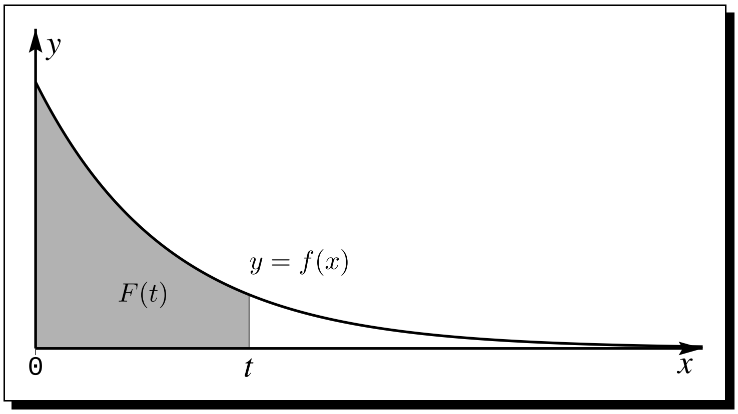
Notre variable T est donc une variable aléatoire continue à valeurs dans $[0; +\infty[$. Nous noterons f la densité de probabilité de la variable T.

1.1 - Fonction de défaillance – Fonction de fiabilité

On appelle *fonction de défaillance* la fonction F définie pour tout $t \geqslant 0$ par

$$\boxed{F(t) = P(T \leqslant t)}$$

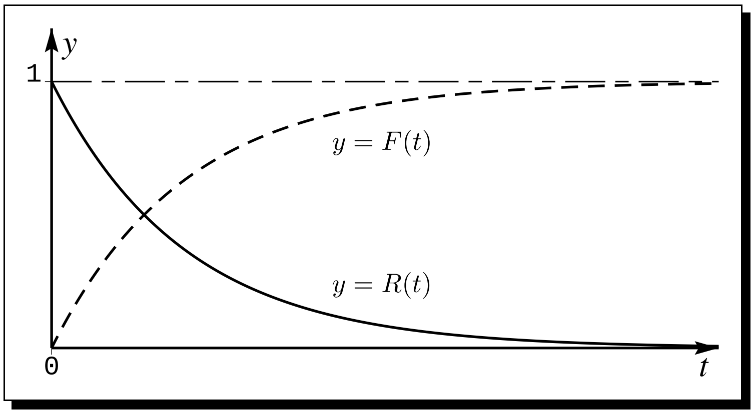
Le nombre $F(t)$ représente la probabilité qu'un dispositif choisi au hasard dans la population ait une défaillance avant l'instant t.



Cette fonction nous amène naturellement une fonction associée : la *fonction de fiabilité* R définie pour tout $t \geqslant 0$ par

$$\boxed{R(t) = 1 - F(t)}$$

Le nombre $R(t)$ représente la probabilité qu'un dispositif choisi au hasard dans la population n'ait pas de défaillance avant l'instant t.



1.2 - Taux d'avarie instantané

Sur la courbe représentative de la fonction de défaillance F, on s'intéresse à la pente de la tangente pour un instant t donné. (Cette pente est égale à $F'(t)$.) On appelle *taux d'avarie instantané* à l'instant t ce nombre, et on le note $\lambda(t)$. On montre que l'on a pour tout $t \geqslant 0$:

$$\boxed{\lambda(t) = \frac{f(t)}{R(t)}}$$

Remarques :

• Comme $R(t) = 1 - F(t)$, on montre facilement que l'on a également :

$$\boxed{\lambda(t) = -\frac{R'(t)}{R(t)}} \qquad \text{et} \qquad \boxed{\lambda(t) = \frac{f(t)}{1 - F(t)}}$$

Les relations précédentes permettent donc de trouver $\lambda(t)$ si l'on connaît $F(t)$ ou $R(t)$.

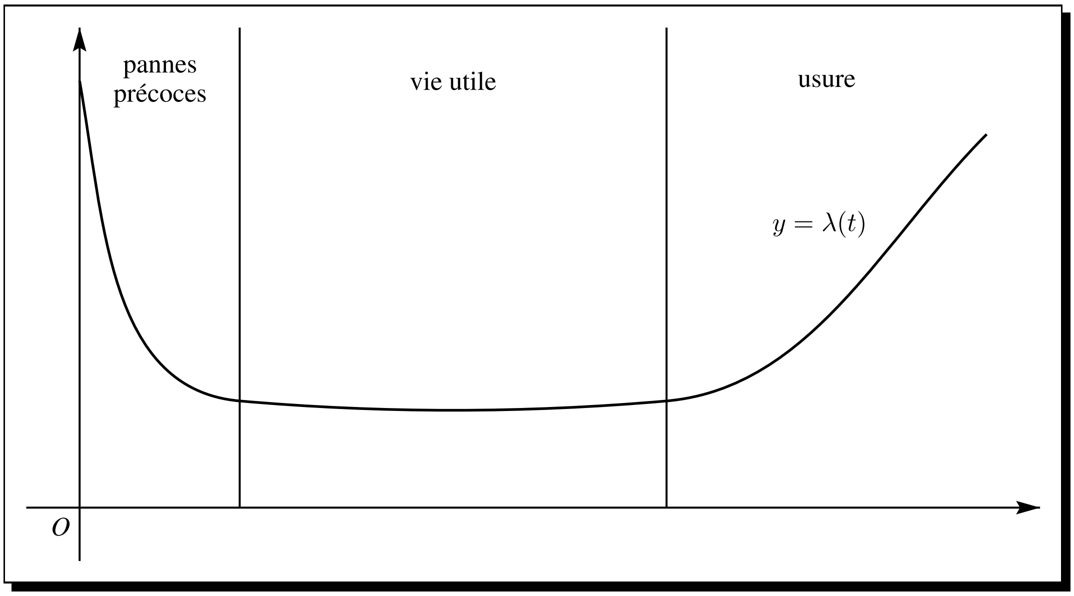
Inversement, si l'on connaît $\lambda(t)$, on peut obtenir $R(t)$ (respectivement $F(t)$) comme solution de l'équation différentielle du premier ordre :

$$\frac{R'(t)}{R(t)} = -\lambda(t) \qquad \left(\text{respectivement} \qquad \frac{F'(t)}{1 - F(t)} = -\lambda(t) \qquad\right)$$

On a alors

$$\boxed{R(t) = e^{-\int_0^t \lambda(x)\,dx}} \qquad \text{et} \qquad \boxed{F(t) = 1 - e^{-\int_0^t \lambda(x)\,dx}}$$

• On constate expérimentalement que, pour la plupart des matériels, la courbe représentative du taux d'avarie instantané $t \mapsto \lambda(t)$ a la forme donnée par la figure ci-dessous. Elle est appelée *courbe en baignoire* et comporte 3 parties distinctes :



À gauche, la période de début de fonctionnement, où le taux d'avarie instantané décroît avec le temps, car les pannes précoces dues à des défauts de fabrication ou de conception sont de moins en moins nombreuses.

Au centre, la période de maturité, ou « vie utile », où le taux d'avarie instantané reste à peu près constant ; pendant cette période, les pannes paraissent dues au hasard.

À droite, la période d'usure, où le taux d'avarie instantané augmente avec le temps, car les pannes sont dues à l'usure croissante du matériel.

1.3 - MTBF

On appelle *Moyenne des Temps de Bon Fonctionnement (MTBF)* l'espérance mathématique de la variable aléatoire T. On a donc

$$\boxed{MTBF = E(T) = \int_0^{+\infty} t f(t)\,dt}$$

Remarque – À l'origine, le sigle $MTBF$ provient de l'expression « *Mean Time Between Failures* » qui signifie « temps moyen entre deux défaillances ».

1.4 - Fiabilité d'un système

Pour un système constitués de n composants **montés en série** (le bon fonctionnement de chacun étant indépendant du bon fonctionnement des autres), on montre que l'on a

$$\boxed{R(T) = R_1(t) \times R_2(t) \times \cdots \times R_n(t)}$$

où $R_1, R_2, \ldots, R_n$ sont les fonctions de fiabilités respectives des n composants. (En effet, le système est défaillant dès qu'un seul composant est défaillant.)

Pour un système constitués de n composants **montés en parallèles** (le bon fonctionnement de chacun étant indépendant du bon fonctionnement des autres), on montre que l'on a

$$\boxed{F(T) = F_1(t) \times F_2(t) \times \cdots \times F_n(t)}$$

où $F_1, F_2, \ldots, F_n$ sont les fonctions de défaillances respectives des n composants. (En effet, le système est fonctionnel dès qu'un seul composant est fonctionnel.)

2. Loi exponentielle

2.1 - Les fonctions

La *loi exponentielle* est la loi suivie par la variable aléatoire T lorsque le taux d'avarie est constant. Autrement dit, pour tout $t \geqslant 0$, on a

$$\lambda(t) = \lambda$$

où λ est une constante réelle strictement positive.

Cette loi concerne tous les matériels pendant une durée de leur vie (vie utile) et les matériels électroniques pendant presque toute leur vie.

La fonction de fiabilité est définie pour tout $t \geqslant 0$ par

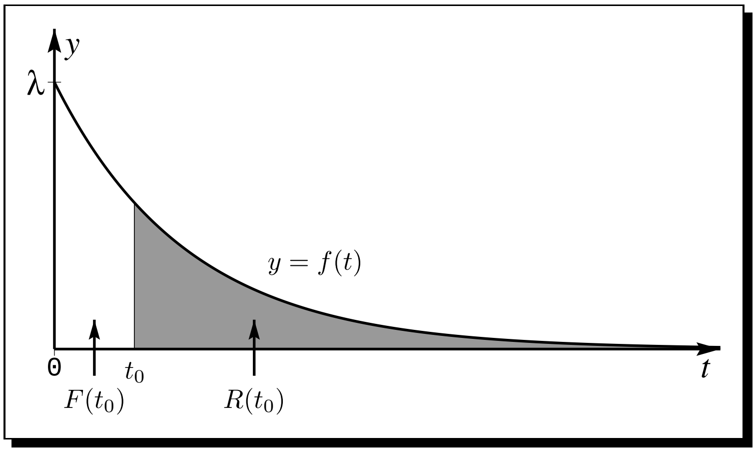
$$\boxed{R(t) = e^{-\lambda t}.}$$

La fonction de défaillance est définie pour tout $t \geqslant 0$ par

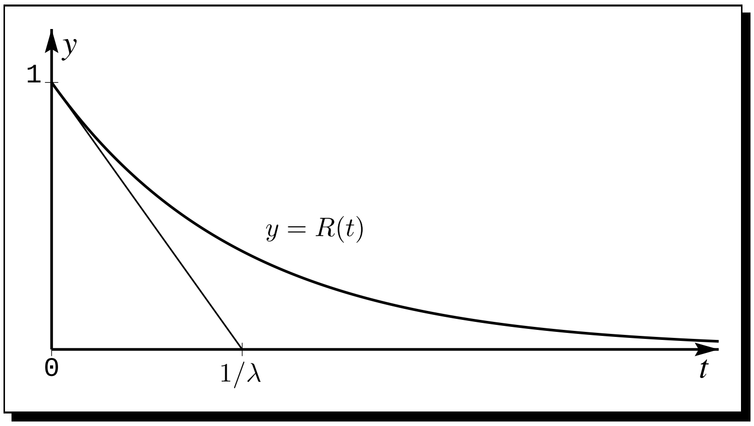
$$\boxed{F(t) = 1 - e^{-\lambda t}.}$$

La densité de probabilité de la variable aléatoire T est définie pour tout $t \geqslant 0$ par

$$\boxed{f(t) = \lambda e^{-\lambda t}.}$$



Remarque – Si la variable aléatoire T suit une loi exponentielle de paramètre λ, alors on aura $\ln R(t) = -\lambda t$, et la représentation graphique de la courbe $y = R(t)$ sur un papier semi-logarithmique sera une droite.



2.2 - MTBF – Écart-type

On admettra que, pour la loi exponentielle de paramètre λ, on a

$$\boxed{E(T) = \frac{1}{\lambda} = MTBF.}$$

On montre également que :

$$\boxed{\text{pour } t = \frac{1}{\lambda} = MTBF, \text{ on a } R(t) \approx 0,368.}$$

Enfin, on admettra que l'écart-type de la variable aléatoire T est

$$\boxed{\sigma(T) = \frac{1}{\lambda} = MTBF.}$$

3. Exercices

Exercice 1 : Fiabilité d'un type de composant

On considère des composants d'un certain type.

On admet que la variable aléatoire T qui associe à tout composant tiré au hasard sa durée de vie exprimée en jours suit la loi exponentielle définie par

$$R(t) = e^{-0,000\,2t}$$

1. Déterminer la probabilité que l'un de ces composants ait une durée de vie supérieure à 2 000 jours.
2. Déterminer la MTBF et l'écart-type de T.
3. déterminer la valeur de t_0 pour laquelle $p(T \leqslant t_0) = 0,5$.

Exercice 2 : Déterminer le paramètre d'une loi exponentielle

Une variable aléatoire T suit une loi exponentielle.

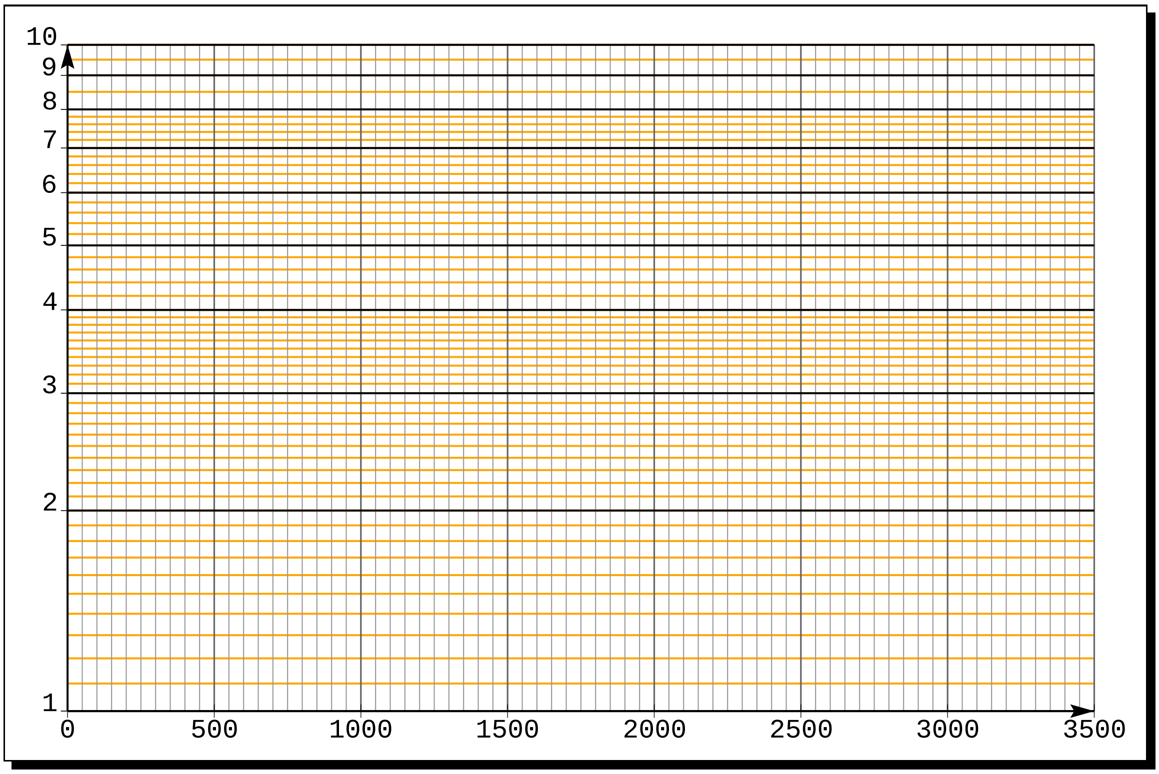
1. Déterminer le paramètre de cette loi sachant que $P(T \leqslant 70) = 0,05$.
2. Les valeurs prises par T étant des heures, déterminer la MTBF et l'écart-type de T.
3. Calculer $P(T > 30)$.

Exercice 3 : Détermination graphique de MTBF pour une loi exponentielle

On a mesuré pour 20 éléments du même type la durée de vie, en heures, avant la première défaillance. Après calculs, on a obtenu le tableau suivant :

t_i	500	1 000	1 500	2 000	2 500	3 000
$R(t)$ en %	66,7	47,6	33,3	23,8	14	10

1. Porter les points $(t_i ; R(t_i))$ sur le graphique ci-dessous.



2. On désigne par T la variable aléatoire qui, à tout dispositif choisi au hasard dans la population des dispositifs de même type que celui étudié plus haut, associe sa durée de vie avant une défaillance.

Pourquoi est-il légitime de supposer que T suit une loi exponentielle ?

3. *a*) Tracer sur le graphique précédent une droite d'ajustement affines pour les points marqués.

b) Lire alors la MTBF de la variable aléatoire T.

c) En déduire le paramètre λ de la loi exponentielle.

4. Reprendre la question **3.** en faisant cette fois-ci un ajustement par la méthode des moindres carrés.

Exercice 4 : Fiabilité de la pièce *JB 007*

Un technicien supérieur en maintenance a été chargé d'étudier plus particulièrement le cas de la pièce *JB 007*. Son historique lui permet de connaître les durées de vie des pièces de ce type déjà utilisées. Elles sont consignées dans le tableau suivant :

no d'ordre	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
durée de vie (en h)	130	20	348	100	14	212	64	50	135	224	67

1. *a*) On note $R(t)$ la probabilité de survie du matériel à la date t. En utilisant une feuille de papier semi-logarithmique, justifier l'approche de $R(t)$ apr une loi exponentielle.

b) Déterminer graphiquement la MATBF d'une pièce *JB 007*. Montrer que l'on peut prendre pour valeur approchée du paramètre λ de la loi exponentielle la valeur $0,007$.

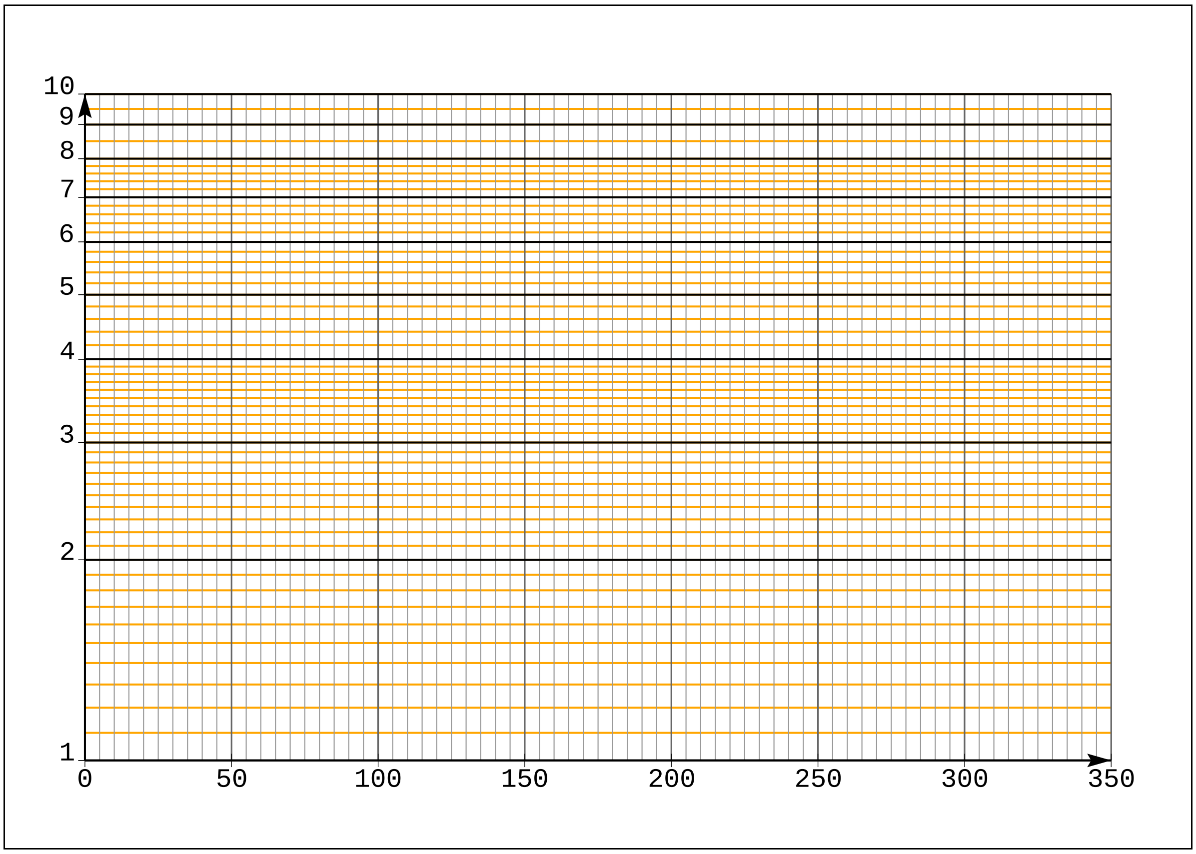
2. Déterminer par le calcul à quel instant t_0 la fiabilité d'une pièce *JB 007* est égale à 80%.

Comment vérifier ce résultat graphiquement ?

3. On envisage de placer deux pièces *JB 007* en parallèle, c'est à dire de telle sorte que le système fonctionne tant que l'une des deux pièces est en état de fonctionnement.

Étant donné qu'à l'instant t_0 la fiabilité d'une pièce *JB 007* est de 80%, déterminer, à cet instant, celle du système ainsi formé. (On admet que les deux pièces fonctionnent de façon indépendante.)

4. Quelle aurait été la fiabilité à l'instant t_0 si, au lieu de placer les deux pièces en parallèle, on les avait placées en série, c'est-à-dire de telle sorte que le système soit défaillant dès que l'une des deux pièces casse ? (On admettra encore l'indépendance de fonctionnement des deux pièces.)


10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
0
50
100
150
200
250
300
350