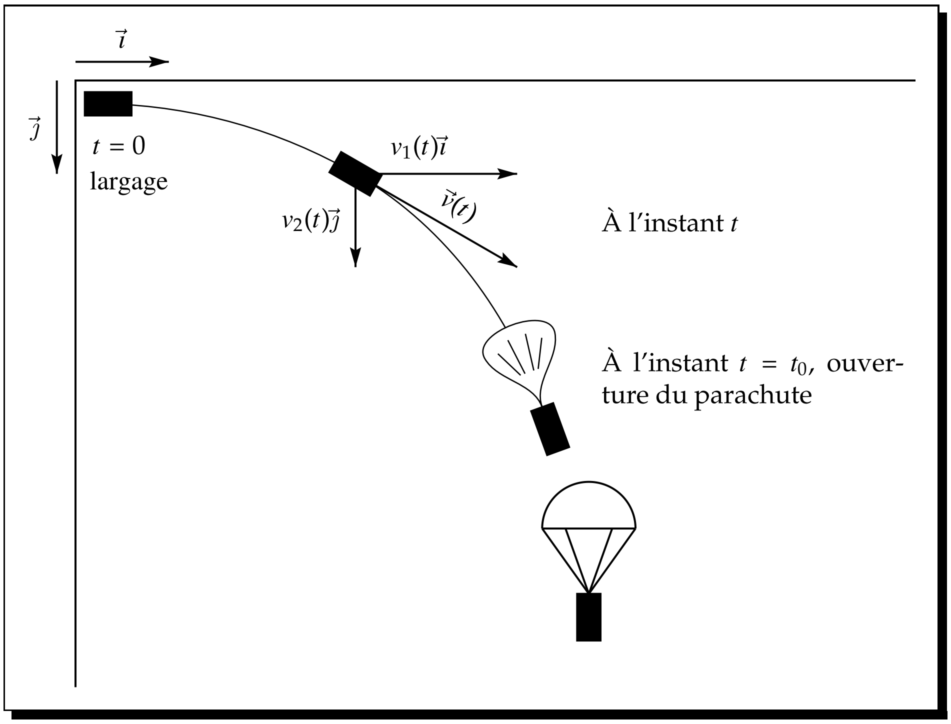
Brevet de Technicien Supérieur

durée : 2h

Session 1994

Exercice 1 : (*10 points*) **Largage d'un container,** *bts mai, session 1994*

On lance un container à partir d'un avion. On cherche à déterminer l'instant où la norme de la vitesse est minimale pour pouvoir déclencher l'ouverture du parachute. L'unité de temps est la seconde, l'unité de longueur est le mètre. Le centre de gravité G est repéré para rapport au repère orthonormal $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. L'axe $(O, \vec{\jmath})$ est dirigé vers le sol. À chaque instant t, le point G admet un vecteur vitesse $\vec{v}(t)$ de coordonnées $v_1(t)$ et $v_2(t)$ où v_1 et v_2 sont des fonctions du temps définies sur $[0; +\infty[$.



Sachant que le container est soumis à son poids et à la résistance de l'air, on établit que :

• la fonction v_1 vérifie l'équation différentielle
$$v' + 0,2v = 0$$

• la fonction v_2 vérifie l'équation différentielle
$$v' + 0,2v = 9,8.$$

1. *a*) Résoudre l'équation différentielle
$$v' + 0,2v = 0.$$

b) Sachant de plus que pour $t = 0$, on a $v_1(0) = 100$, déterminer $v_1(t)$.

2. *a*) Résoudre l'équation différentielle
$$v' + 0,2v = 9,8.$$

b) Sachant de plus que pour $t = 0$, on a $v_2(0) = 0$, déterminer $v_2(t)$.

3. *a*) Sachant que la norme du vecteur $\vec{v}(t)$, notée $||\vec{v}(t)||$, vérifie
$$||\vec{v}(t)||^2 = (v_1(t))^2 + (v_2(t))^2,$$

démontrer que l'on a :
$$||\vec{v}(t)||^2 = 12\,401e^{-0,4t} - 4\,802e^{-0,2t} + 2\,401.$$

Afin de simplifier les calculs, on remplace l'étude de $||\vec{v}(t)||^2$ par celle de $f(t)$ où la fonction f est définie sur $[0; +\infty[$ par
$$f(t) = 12\,400e^{-0,4t} - 4\,800e^{-0,2t} + 2\,400 = 400\left(31e^{-0,4t} - 12e^{-0,2t} + 6\right).$$

b) Calculer $f(0)$. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(t)$.

c) Étudier les variations de la fonction f.

d) En déduire les variations de la fonction qui à $t \in [0;+\infty[$, associe $h(t) = \sqrt{f(t)}$.

e) Tracer dans un repère orthogonal (1 cm en abscisse représente 1 seconde, 1 cm en ordonnée représente 10 mètres par seconde) a courbe représentative de h.

f) En déduire à 10^{-2} près par défaut l'instant t_0 pour lequel $h(t)$ est minimum.

Déterminer alors ce minimum à 10^{-2} près par défaut.

Exercice 2 : (*10 points*) **Coupes de plaques d'acier,** *bts mai, session 1994*

Dans un atelier, une machine A permet de couper des plaques d'acier dont la longueur permet de définir une variable aléatoire qui suit une loi normale de moyenne $M = 100$ et d'écart-type $\sigma = 1$ (les longueurs étant exprimées en cm).

1. *a*) Quelle est, à 10^{-2} près par défaut, la probabilité qu'une plaque ait une longueur extérieure à l'intervalle $[98;102]$?

b) Trouver une valeur approchée à 10^{-2} près du nombre a tel que 90% des plaques aient une longueur dans l'intervalle $[100-a;100+a]$.

2. On supppose maintenant que 3% des plaques coupées par la machine A sont rejetées parce que leur longueur ne convient pas. Dans un lot contenant un grand nombre de plaques, on en prélève N. X est la variable aléatoire qui, à cette épreuve, associe le nombre de plaques dont la longueur est incorrecte.

a) Quelle est la loi suivie par X ?

b) On suppose $N = 5$. Calculer $p(X = 2)$.

c) On suppose $N = 100$. Quel est le paramètre de la loi de Poisson par laquelle on peut approcher la loi de X ?

Donner alors une valeur approchée à 10^{-2} près de $p(X = 8)$, de $p(X > 2)$.

3. La machine A coupe 500 plaques par jour, dont 3% sont rejetées. On lui adjoint une machine B, et 9% des plaques coupées par cette machine B sont rejetées.

a) La machine B coupe 1 000 plaques par jour.

Quelle est alors la probabilité pour qu'une plaque coupée dans l'atelier soit rejetée ?

b) On veut que la probabilité de rejet d'une plaque reste inférieur à ,05. Quel nombre maximum de plaques peut-on couper avec la machine B, sachant que A coupe 500 plaques par jour ?