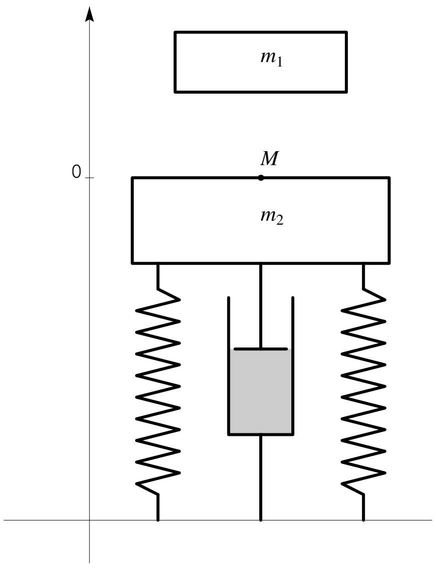
Brevet de Technicien Supérieur

durée : 2h

Session 1993

Exercice 1 : (*12 points*) **Amortissement d'une enclume,** *Bts Mécanique et Automatismes Industriels, 1993*

Pour éviter les perturbations crées par les vibrations lors du choc d'un marteau sur une enclume, on munit l'enclume de deux ressorts et d'un amortisseur selon le schéma ci-dessous :



masse du marteau : $m_1 = 1 \times 10^3$ kg
masse de l'enclume : $m_2 = 14 \times 10^3$ kg
constante de raideur d'un ressort : $k = 183 \times 10^4$ Nm^{-1}
constante de l'amortisseur : $\mu = 2,4 \times 10^4$ u SI

On suppose qu'après le choc, les deux parties (marteau-enclume) restent solidaires. La cote du point M à l'instant t est repérée par $z(t)$ mesurée sur l'axe indiqué sur le schéma. On choisit l'origine des temps $t = 0$ à l'instant où l'ensemble marteau-enclume arrive au point le plus bas de la première oscillation.

1. La cote $z(t)$ (mesurée en mètres) est solution de l'équation différentielle :

(E) $$(m_1 + m_2)\frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2} + \mu\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} + 2kz = 0.$$

Soit

(E) $$15z'' + 24z' + 3\,660z = 0.$$

a) Donner la solution générale de (E) sous la forme :

$$z(t) = e^{-\alpha t}(A\cos(\beta t) + B\sin(\beta t))$$

en déterminant les valeurs de α et β.

b) Les mesures initiales pour $t = 0$ sont

$$z(0) = -50,7 \times 10^{-3} \qquad \text{et} \qquad z'(0) = 0.$$

Exprimer alors la solution de (E) qui vérifie ces deux conditions en déterminant A et B.

2. La position à l'instant t est maintenant donnée par

$$z(t) = -(50,7\cos(15,6t) + 2,6\sin(15,6t)) \times 10^{-3} \times e^{-0,8t}.$$

a) Déterminer, dans l'intervalle $[0, 1]$ à 10^{-2} près chacun, les instants t pour lesquels $z(t) = 0$.

(*On rappelle que les solutions de l'équation* $\tan x = \tan a$ *sont de la forme* $x = a + n\pi$, *n étant un entier.*)

b) Calculer $\tan(15,6t)$ lorsque $z(t)$ est extrêmal, c'est à dire quand $z'(t) = 0$. En déduire, dans l'intervalle $[0, 1]$, les valeurs approchées correspondantes de t à 10^{-2} près.

c) Tracer, sur une feuille millimétrée, la courbe représentative de z en fonction de t lorsque t varie dans $[0, 1]$.

(Sur l'axe des abscisses, gradué de 0 à 1, 20 cm représenteront une seconde.)

Nota : Le texte ci-dessus correspond au texte d'examen. Ici, vous pouvez prendre une feuille non millimétrée (petits carreaux ou grand carreaux), et les étudiants ayant des feuilles à grands carreaux peuvent prendre comme unité 20 grands carreaux pour une seconde.

Exercice 2 : (*8 points*) **Des paquets de farine,** *bts MAI, 1993*

Une machine est chargée de conditionner des paquets de farine. La masse M d'un paquet est une variable aléatoire qui suit une loi normale d'écart-type constant $\sigma = 30$, et dont la moyenne m peut-être modifiée. Un paquet est refusé si sa masse est inférieure à 995 grammes.

1. On suppose que la moyenne m est égale à 1 000.

a) Quelle est la probabilité pour qu'un paquet soit refusé ?

b) On suppose que la probabilité pour qu'un paquet soit refusé est $p = 0,07$. On dispose de 100 paquets. Soit X la variable aléatoire dénombrant le nombre de paquets à rejeter.

Quelle est la loi de X ? Calculer $p(X = 3)$.

On assimile la loi de X à une loi de Poisson. Indiquer le paramètre de cette loi de Poisson et déterminer la valeur indiquée pour $p(X \leqslant 5)$.

2. Afin de diminiuer le nombre de paquets refusés, on décide de modifier le réglage de la machine.

a) Quelle doit être la valeur de m pour que la probabilité d'accepter un paquet soit égale à $0,99$?

b) La machine est réglée de telle sorte que $m = 1\,025$. Afin de vérifier ce réglage, on prélève un échantillon de 20 paquets et on déterminer la masse moyenne $\overline{x}$.

Déterminer l'intervalle centré en m contenant $\overline{x}$ avec une probabilité de $0,95$.