Brevet de Technicien Supérieur

durée : 2h

Session 1991

Exercice 1 : (*12 points*) **Le parachute,** Bts Mécanique et Automatismes Industriels, *1991*

La trajectoire suivie par un objet relié à un parachute est un axe vertical noté $(O, \vec{\imath})$.

À un instant donné, le vecteur vitesse $\vec{V}$ de l'objet est défini par $\vec{V}(t) = v(t)\vec{\imath}$ où v est une fonction de la variable réelle positive t.

Dans ces conditions de l'expérience, le vecteur $\vec{R}$ représentant la résistance de l'air est défini par $\vec{R} = -k\vec{V}$ où k est un nombre réel strictement positif.

On admet que la fonction v vérifie l'équation différentielle

(1) $$mv'(t) + kv(t) = mg$$

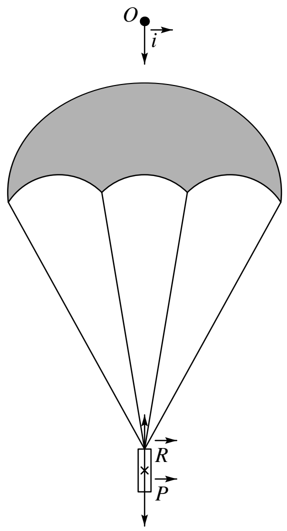
où m est la masse totale de l'objet et du parachute et g le coefficient de l'accélération de la pesanteur.

1. *a*) Montrer qu'il existe une fonction constante, solution particulière de (1);

b) Montrer que les fonctions solutions de (1) sont définies pour tout nombre réel positif t par :

$$v(t) = Ce^{-\frac{k}{m}t} + \frac{mg}{k}$$

où C est une constante réelle dépendant des conditions de l'expérience.



2. Dans la suite du problème on prendra $m = 8$ kg, $g = 10$ ms^{-2} et $k = 25$ unités SI.

a) Donner la fonction particulière v_1 solution de l'équation différentielle (1) correspondant à une vitesse initiale $v(0) = v_0$ de 5 ms^{-1}.

b) Donner la fonction particulière v_2 solution de l'équation différentielle (1) correspondant à une vitesse initiale nulle.

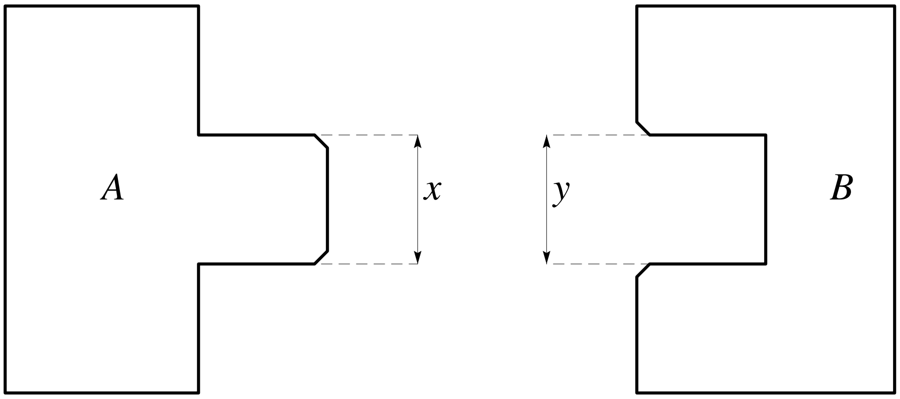
c) Montrer que les fonctions v_1 et v_2 ont la même limite d lorsque t tend vers $+\infty$.

d) Donner la solution particulière v_3 solution de l'équation différentielle (1) correspondant à une vitesse initiale $v(0) = w_0$ de 3,2 ms^{-1}.

e) Tracer soigneusement les courbes C_1, C_2 et C_3 représentant respectivement les fonctions v_1, v_2 et v_3 dans un repère orthogonal $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, où l'unité graphique est de 4 cm sur l'axe Ox, et 2 cm sur l'axe Oy.

Exercice 2 : (*8 points*) **Ajustements et probabilités,** Bts Mécanique et Automatismes Industriels**,** *1991*

Une usine produit des pièces de type A qui doivent s'ajuster dans des pièces de type B.



1. Les différentes valeurs prises par la cote x permettent de définir une variable aléatoire X suivant une loi normale de moyenne 20, d'écart-type $0,04$.

a) Déterminer la probabilité pour qu'une pièce de type A soit acceptable sachant que sa cote x doit être comprise dans l'intervalle $[19,92\,;20,08]$.

b) On suppose maintenant que la proportion de pièces défectueuses de type A réalisées est $0,05$. On prélève des échantillons de 100 pièces. Soit T la variable aléatoire prenant pour valeurs le nombre de pièces défectueuses d'un échantillon.

• Quelle est la loi de probabilité de T ? On admettra qu'on peut l'assimiler à une loi de Poisson dont on donnera le paramètre.

• Déterminer la probabilité de l'événement : $\left[T < 4\right]$

2. Les différentes valeurs prises par la cote y permettent de définir une variable aléatoire Y suivant une loi normale de moyenne $20,1$ et d'écart-type $0,03$. On suppose d'autre part que les pièces de type A et B peuvent s'assembler si le jeu entre les cotes, $y-x$, est au moins égal à $0,01$.

On rappelle que si X et Y sont des varables aléatoires suivant des lois normales de moyennes m_x et m_y, de variances V_x et V_y, alors $Y-X$ suit une loi normale de moyenne $m_y - m_x$ et de variance $V_x + V_y$.

a) Déterminer la moyenne et l'écart-type de la variable $Y-X$.

b) Quelle est la probabilité qu'une pièce de type A prise au hasard puisse être introduite dans une pièce de type B également prise au hasard ?