Brevet de technicien supérieur, session 2003

Exercice 1 : Une chaîne d'embouteillage, *bts mai, mai 2003*

1. *a*) Les événements A et B étant indépendants, il vient

$$p(E_1) = p(A \cap B) = p(A) \times p(B) = 0,04 \times 0,02 \qquad \text{soit} \qquad \boxed{p(E_1) = 8 \cdot 10^{-4}}$$

b) Il vient

$$p(E_2) = p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) = 0,04 + 0,02 - 8 \cdot 10^{-4} \qquad \text{soit} \qquad \boxed{p(E_2) = 0,0592}$$

2. À l'aide du formulaire, il vient

$$\begin{aligned} p(X \leqslant 2) &= p(X = 0) + p(X = 1) + p(X = 2) \\ &= 0,606\,5 + 0,303\,3 + 0,075\,8 \qquad \text{soit} \qquad \boxed{p(X \leqslant 2) = 0,985\,6} \end{aligned}$$

a) Répondre à la question revient à déterminer $p(X \leqslant 4)$. Il vient alors

$$p(X \leqslant 4) = p(X \leqslant 2) + p(X = 3) + p(X = 4) \qquad \text{soit} \qquad \boxed{p(X \leqslant 4) = 0,999\,8}$$

b) Et comme le calcul de $p(X \leqslant 3)$ nous donne $p(X \leqslant 3) = 0,998\,2$, l'entier cherché est $\boxed{n = 3}$.

3. Si la variable Y suit la loi normale $\mathcal{N}(1,5; 0,01)$, alors la variable $T = (Y - 1,5)/0,01$ suit la loi normale $\mathcal{N}(0; 1)$. Il vient alors :

$$\begin{aligned} p(1,47 \leqslant Y \leqslant 1,53) &= p\left(\frac{-0,03}{0,01} \leqslant \frac{Y - 1,5}{0,01} \leqslant \frac{0,03}{0,01}\right) \\ &= p(-3 \leqslant T \leqslant 3) = 2\Pi(3) - 1 \qquad \text{soit} \qquad \boxed{p(1,47 \leqslant Y \leqslant 1,53) = 0,997\,3 \approx 0,997} \end{aligned}$$

4. *a*) On a immédiatement

$$p(T > 200) = e^{-0,005 \times 200} = e^{-1} \qquad \text{soit} \qquad \boxed{p(T > 200) \approx 0,368}$$

b) Et comme $p(T > t) = e^{-0,005t}$, la relation $p(T > t) = 0,8$ entraîne

$$e^{-0,005t} = 0,8 \quad \Longrightarrow \quad -0,005t = \ln 0,8 \quad \Longrightarrow \quad t = \frac{-\ln 0,8}{0,005} \approx 44,63.$$

La valeur cherchée est donc $\boxed{t = 44 \text{ jours}}$.

Exercice 2 : Équation différentielle, *bts mai, mai 2003*

A 1. On reconnaît une équation du type $y' = ay$ avec $a = -1$. Une primitive de a est $A = -x$, et la solution générale de (E_0) est donc $\boxed{y_0(x) = ke^{-x}}$ où k est une constante réelle quelconque.

2. On a $h(x) = 2xe^{-x}$, donc $h'(x) = (2 - 2x)e^{-x}$, et on vérifie que l'on a bien $h + h' = 2e^{-x}$, ce qui prouve que $\boxed{h(x) = 2xe^{-x} \text{ est une solution particulière de } (E)}$.

3. La solution générale de (E) est donc $\boxed{y(x) = (2x + k)e^{-x} \text{ où } k \text{ est une constante réelle quelconque.}}$

4. Si la courbe représentative de f passe par le point $(0; 3)$, c'est donc que l'on a $f(0) = 3$. On en déduit que $k = 3$, et par suite que $\boxed{f(x) = (2x + 3)e^{-x}}$.

B 1. *a*) On a bien sûr $\boxed{f(0) = 3}$, *b*) et on a $\boxed{f'(0) = -1}$ puisque ce nombre représente le coefficient directeur de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 0.

c) La condition $f(0) = b = 3$ nous donne immédiatement b. Et comme $f'(x) = (a - ax - b)e^{-x}$, il vient $f'(0) = a - b = 3$, et par suite $a = 2$. On a donc finalement $\boxed{(a, b) = (2, 3)}$ et $\boxed{f(x) = (2x + 3)e^{-x}}$.

2. *a*) On a facilement $\boxed{f'(x) = (-2x-1)e^{-x}}$, qui est du signe de $-2x-1$ puisque e^{-x} est toujours strictement positif.
D'où le tableau de variation de f :

x	$-\infty$	$-1/2$	$+\infty$
$f(x)$	$\nearrow$	$2\sqrt{e}$	$\searrow$

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = 2e^{1/2} = 2\sqrt{e}$$

3. *a*) Connaissant le développement limité de e^t en 0, on en déduit facilement

$$\boxed{e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x) \qquad \text{avec} \qquad \lim_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0}$$

b) Et le produit de ce DL par le polynôme $(2x+3)$ nous donne

$$(2x+3)e^{-x} = (2x+3)\left(1 - x + \frac{x^2}{2}\right) + x^2\varepsilon(x) = 3 + 2x - 3x + \frac{3}{2}x^2 - 2x^2 + x^2\varepsilon(x)$$

$$\text{d'où} \qquad \boxed{f(x) = 3 - x - \frac{1}{2}x^2 + x^2\varepsilon(x) \qquad \text{avec} \qquad \lim_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0.}$$

$\boxed{\text{C}}$ **1.** Il vient

$$f(x) = -f'(x) + 2e^{-x} \quad \Longrightarrow \quad \int f(x)\,dx = -\int f'(x)\,dx + \int 2e^{-x}\,dx \qquad \text{soit} \qquad \int f(x)\,dx = -f(x) - 2e^{-x}$$

d'où une primitive de f : $\boxed{F(x) = -f(x) - 2e^{-x} = (-2x-5)e^{-x}}$

2. Le calcul de l'intégrale I donne alors

$$I = \int_0^{1/2} f(x)\,dx = F\left(\frac{1}{2}\right) - F(O) \qquad \text{soit} \qquad \boxed{I = -6e^{1/2} + 5 \approx 1,361}$$

3. Pour J, il vient

$$J = \int_0^{1/2}\left(3 - x - \frac{1}{2}x^2\right)dx = \left[3x - \frac{x^2}{2} - \frac{1}{6}x^3\right]_0^{1/2} \qquad \text{soit} \qquad \boxed{J = \frac{65}{48} \approx 1,354}$$

Et la différence $\boxed{J - I \approx -6,649 \cdot 10^{-3} \text{ est bien inférieure à } 10^{-2}}$.