Brevet de technicien supérieur, session 1998

Exercice 1 : Une usine de plaquettes, bts mai**,** *1998*

A **1.** On trouve $\boxed{m = 39,86 \approx 39,9}$ et $\boxed{s \approx 1,6}$.

2. La variable L suit la loi normale $\mathcal{N}(\mu; 1,6)$. La théorie de l'échantillonage nous dit qu'alors, la variable $\overline{X}$ qui associe à chaque échantillon de taille n la moyenne des longueurs des plaquettes de l'échantillon suit la loi normale $\mathcal{N}\left(\mu; \frac{1,6}{\sqrt{n}}\right)$ (si $n > 30$). Donc ici, avec $n = 100$, la variable $\overline{X}$ suit la loi normale $\mathcal{N}(\mu; 0,16)$, et la variable T définie par $T = (\overline{X} - \mu)/0,16$ suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$.

a) Comme estimation ponctuelle de μ, on prend la moyenne m de l'échantillon. Soit $\boxed{\mu = 39,9}$.

b) On veut un intervalle de confiance à 95%, centré sur μ, de la variable $\overline{X}$. Sachant que $p(-1,96 \leqslant T \leqslant 1,96) = 0,95$ puisque T suit la loi normale centrée réduite, il vient

$$\begin{aligned}
0,95 &= p\left(-1,96 \leqslant \frac{\overline{X} - 39,9}{0,16} \leqslant 1,96\right) \\
&= p(-1,96 \times 0,16 + 39,9 \leqslant \overline{X} \leqslant 1,96 \times 0,16 + 39,9) \\
&= p(39,586\,4 \leqslant \overline{X} \leqslant 40,213\,6) \\
&\approx p(39,6 \leqslant \overline{X} \leqslant 40,2)
\end{aligned}$$

D'où l'intervalle de confiance à 95% cherché : $\boxed{[39,6\,; 40,2]}$.

B **1.** On suppose que L suit la loi $\mathcal{N}(40\,; 1,6)$ et que ℓ suit la loi $\mathcal{N}(25\,; 1,2)$. Donc les variables T et t, définies respectivement par

$$T = \frac{L - 40}{1,6} \qquad \text{et} \qquad t = \frac{\ell - 25}{1,2}$$

suivent la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$.

a) Il vient alors :

$$\begin{aligned}
p(37 \leqslant L \leqslant 43) &= p\left(\frac{37-40}{1,6} \leqslant \frac{L-40}{1,66} \leqslant \frac{43-40}{1,6}\right) \\
&= p(-1,875 \leqslant T \leqslant 1,875) \\
&= 2\Pi(1,875) - 1 \qquad \text{vu la parité de la loi normale centrée réduite}
\end{aligned}$$

Comme $\Pi(1,875)$ n'est pas dans le formulaire, on fait une interpolation affine, et on prend comme valeur approchée

$$\Pi(1,875) \approx \frac{\Pi(1,87) + \Pi(1,88)}{2} \approx 0,969\,6$$

On trouve finalement $\boxed{p(37 \leqslant L \leqslant 43) = 0,939\,2 \approx 0,94}$.

b) De la même façon, on a

$$\begin{aligned}
p(22 \leqslant \ell \leqslant 28) &= p\left(\frac{22-25}{1,2} \leqslant \frac{\ell-25}{1,2} \leqslant \frac{28-25}{1,2}\right) \\
&= p(-2,5 \leqslant t \leqslant 2,5) \\
&= 2\Pi(2,5) - 1 \\
&= 2 \times 0,993\,8 - 1 = 0,987\,6
\end{aligned}$$

soit $\boxed{p(22 \leqslant \ell \leqslant 28) \approx 0,99}$.

Si on nomme A l'événement : « la longueur L vérifie $37 \leqslant L \leqslant 43$ », et B l'événement : « la largeur ℓ vérifie $22 \leqslant L \leqslant 25$ », alors il est clair que l'on a $p(A) = 0,95$ et $p(B) = 0,99$, vu les questions précédentes. Une plaquette est acceptée si l'événement $A \cap B$ est réalisé. Or, les événements A et B étant indépendants, on a $p(A \cap B) = p(A) \times p(B) \approx 0,927\,5$. La probabilité d'obtenir une plaquette qui soit acceptée est donc $\boxed{p \approx 0,93}$;

C **1.** On tire 100 plaquettes dans les mêmes conditions et avec remise. Tous les tirages sont indépendants, et la seule issue qui nous intéresse est de savoir si la plaquette est rejetée ou non, la probabilité qu'une plaquette soit rejetée étant de $1 - 0,93 = 0,07$. On est donc dans le cadre d'un schéma de Bernouilli et la variable X égale au nombre de plaquette rejetées après 100 tirages suit une $\boxed{\text{loi binomiale } \mathcal{B}(100\,; 0,07)}$. Son espérance est $E(X) = 100 \times 0,07$, soit $\boxed{E(X) = 7}$.

2. Si on approxime cette loi par une loi de Poisson, on conserve l'espérance, donc le paramètre est $\boxed{\lambda = 7}$. On aura alors

$$p(X < 10) = \sum_{i=0}^{i=9} p(X = i) \approx 0,829$$

soit $\boxed{p(X < 10) \approx 0,83}$.

Exercice 2 : Transformée de Laplace et équation différentielle, bts mai**,** *1998*

A **1.** *a*) On a

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[f''(t)] &= p\mathcal{L}[f'(t)] - f'(0^+) \qquad \text{avec} \qquad f'(0^+) = 0\\ &= p\left(p\mathcal{L}[f(t)] - f(0^+)\right) \qquad \text{avec} \qquad f(0^+) = 1\end{aligned}$$

Soit finalement, en notant $F(p) = \mathcal{L}[f(t)]$, $\boxed{\mathcal{L}[f''(t)] = p^2F(p) - p}$.

b) Dans la deuxième partie du calcul précédent, on a montré que $\boxed{\mathcal{L}[f'(t) = pF(p) - 1]}$.

c) Il vient alors, pour le dernier calcul

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[f''(t) + 2f'(t) + 2f(t)] &= \mathcal{L}[f''(t)] + 2\mathcal{L}[f'(t)] + 2\mathcal{L}[f(t)]\\ &= p^2F(p) - p + 2(pF(p) - 1) + 2F(p)\\ &= (p^2 + 2p + 2)F(p) - (p + 2)\end{aligned}$$

Finalement, on a $\boxed{\mathcal{L}[f''(t) + 2f'(t) + 2f(t)] = (p^2 + 2p + 2)F(p) - (p + 2)}$.

2. Pour cette question, il suffit de se reporter au formulaire, qui affirme que, si U désigne la fonction échelon, alors

$$\boxed{\mathcal{L}[e^{-t}U(t)] = \frac{1}{p+1}}$$

3. On applique la transformée de Laplace à l'hypothèse différentielle *b*) donnée en introduction du problème. Il vient alors :

$$\begin{aligned}f''(t) + 2f'(t) + 2f(t) = e^{-t} \quad &\Longleftrightarrow \quad \mathcal{L}[f''(t) + 2f'(t) + 2f(t)] = \mathcal{L}[e^{-t}]\\ &\Longleftrightarrow \quad (p^2 + 2p + 2)F(p) - (p + 2) = \frac{1}{p+1}\\ &\Longleftrightarrow \quad F(p) = \frac{1}{p^2 + 2p + 2} \times \left(\frac{1}{p+1} + (p + 2)\right)\end{aligned}$$

Finalement, on a $\boxed{F(p) = \dfrac{1}{(p^2 + 2p + 2)(p + 1)} + \dfrac{p + 2}{p^2 + 2p + 2}}$.

B **1.** On vérifie facilement, par réduction au même dénominateur, que

$$\boxed{\frac{1}{(p + 1)(p^2 + 2p + 2)} = \frac{1}{p+1} - \frac{p + 1}{p^2 + 2p + 2},}$$

En combinant avec l'expression de $F(p)$ obtenue dans la partie **A.**, on obtient

$$F(p) = \frac{1}{p+1} - \frac{p+1}{p^2 + 2p + 2} + \frac{p+2}{p^2 + 2p + 2} = \frac{1}{p+1} + \frac{1}{p^2 + 2p + 2}$$

$$\text{soit} \qquad \boxed{F(p) = \frac{1}{p+1} + \frac{1}{(p + 1)^2 + 1}.}$$

2. Par lecture inverse du tableau des transformées de Laplace, on voit que l'original de $1/(p + 1)$ est $e^{-t}U(t)$.

Pour $1/\left((p + 1)^2 + 1\right)$, il faut invoquer un théorème de changement d'échelle : si $F(p) = 1/(p^2 + 1)$, alors l'original est $\sin(t) \times U(t)$. Mais dans notre cas, c'est plutôt $F(p + 1)$ que l'on a. On sait alors que l'original est la fonction h définie par $h(t) = e^{-t} \sin(t) \times U(t)$.

Finalement, l'original f cherchée est somme des deux originaux particuliers ci-dessus, soit

$$\boxed{f(t) = e^{-t} \times U(t) \times (1 + \sin(t))}$$
