Brevet de technicien supérieur, session 1996

Exercice 1 : Calcul d'un moment d'inertie, *Bts maintenance industrielle*, 1996

– Partie I –

1. Comme $1+t^2 \neq 0$ pour tout réel t, l'équation différentielle (E) est équivalente à l'équation différentielle

$$x' = -\frac{2t}{1+t^2}x$$

dont on sait que les solutions sont toutes les fonctions x du type

$$x = ke^{F(t)} \qquad \text{où} \qquad k \text{ constante réelle arbitraire} \quad \text{et} \qquad F \text{ primitive de la fonction } \frac{-2t}{1+t^2}.$$

Dans l'écriture $2t/(1+t^2)$, on reconnaît une expression du type u'/u avec $u(t) = 1+t^2$. Pour primitive F, on peut donc choisir la fonction définie pour tout réel t par $F(t) = -\ln(1+t^2)$. Finalement, les solutions de l'équation différentielle (E) sont toutes les fonctions x ayant une écriture du type

$$x(t) = ke^{-\ln(1+t^2)} = ke^{\ln\left(\frac{1}{1+t^2}\right)} \qquad \text{soit} \qquad \boxed{x(t) = \frac{k}{1+t^2} \quad \text{où} \quad k \text{ constante réelle arbitraire}}$$

2. Si $f(t) = k/(1+t^2)$ pour un certain réel k, avec $f(0) = 1$, c'est que $k = 1$ d'où la fonction f cherchée : $\boxed{f(t) = \frac{1}{1+t^2}}$.

– Partie II –

1. *a*) On a facilement

$$A = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\,dt, = \left[\,\text{Arctan}\, t\right]_0^1 = \frac{\pi}{4} - 0 \qquad \text{soit} \qquad \boxed{A = \frac{\pi}{4}}$$

b) Dans l'écriture $1/(1+t^2)$, on reconnaît une expression du type $\frac{1}{2} \times \frac{u'}{u}$ avec $u = 1+t^2$. On a donc

$$B = \int_0^1 \frac{t}{1+t^2}\,dt, = \frac{1}{2}\left[\ln(1+t^2)\right]_0^1 = \frac{1}{2}\left[\ln 2 - 0\right] \qquad \text{soit} \qquad \boxed{B = \frac{1}{2}\ln 2}$$

2. *a*) Il suffit de réduire le second membre au même dénominateur pour vérifier l'égalité proposée.

b) On a donc

$$\begin{aligned} C &= \int_0^1 \frac{t^2}{1+t^2}\,dt = \int_0^1 1 - \frac{1}{1+t^2}\,dt \\ &= \int_0^1 dt - \int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\,dt \\ &= 1 - A \qquad \text{soit} \qquad \boxed{C = 1 - \frac{\pi}{4}} \end{aligned}$$

– Partie III –

1. On a

$$\begin{aligned} M &= \int_0^1 (1-t)^2 f(t)\,dt = \int_0^1 \frac{(1-t)^2}{1+t^2}\,dt = \int_0^1 \frac{1-2t+t^2}{1+t^2}\,dt \\ &= \int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\,dt - 2\int_0^1 \frac{t}{1+t^2}\,dt + \int_0^1 \frac{t^2}{1+t^2}\,dt \qquad \text{soit} \qquad \boxed{M = A - 2B + C} \end{aligned}$$

2. D'où $\boxed{M = 1 - \ln 2 \approx 0,307}$

Exercice 2 : Statistiques inférentielles : un problème de synthèse. *Bts Maintenance industrielle, 1996*

I **1.** La variable X suit la loi normale $\mathcal{N}(400, 40)$, donc la variable T définie par $T = (X - 400)/40$ suit la loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$. On a donc

$$\begin{aligned}
p(X \leqslant 318) &= p(X - 400 \leqslant 318 - 400) \\
&= p\left(\frac{X-400}{40} \leqslant \frac{318-400}{40}\right) \\
&= p\left(T \leqslant \frac{318-400}{40}\right) = p(T \leqslant -2,05) \\
&= p(T \geqslant 2,05) \quad \text{vu la symétrie de la courbe de la loi } \mathcal{N}(0,1) \\
&= 1 - \Pi(2,05) = 1 - 0,979\,8 \qquad \text{soit} \quad \boxed{p(X \leqslant 318) = 0,0202}
\end{aligned}$$

2. *a*) On procède 50 fois de suite à l'expérience « *prélever un moteur dans la production* ». Les **50 tirages sont considérés indépendants**, et il n'y a **que deux issues** qui nous interressent : le moteur tiré est ou non commercialisable, la probabilité qu'un moteur soit non commercialisable étant $p = 0,02$. On est dans le cadre d'un schéma de Bernouilli, et la variable Y suit $\boxed{\text{la loi binômiale } \mathcal{B}(50\,;0,02)}$.

b) Si l'on a au plus trois moteurs non commercialisables, c'est que $Y \leqslant 3$. D'où le calcul suivant, en notant $p = 0,02$ et $q = 1 - p = 0,98$:

$$\begin{aligned}
p(Y \leqslant 3) &= p(Y = 0) + p(Y = 1) + p(Y = 2) + p(Y = 3) \\
&= C_{50}^0 p^0 q^{50} + C_{50}^1 p^1 q^{49} + C_{50}^2 p^2 q^{48} + C_{50}^3 p^3 q^{47} \\
&= q^{50} + 50pq^{49} + \frac{50 \times 49}{2} p^2 q^{48} + \frac{50 \times 49 \times 48}{3 \times 2} p^3 q^{47} \\
&\approx 0,364\,2 + 0,371\,6 + 0,185\,8 + 0,060\,7 \qquad \text{soit} \quad \boxed{p(Y \leqslant 3) \approx 0,982\,2}
\end{aligned}$$

II **1.** On trouve $\boxed{m_1 = 398,8}$ et $\boxed{\sigma_1 \approx 39,38}$

2. *a*) Avec la valeur approchée $\sigma_1 = 39,4$, on trouve $\sigma_D \approx 5,65$. La variable aléatoire D suit donc la loi normale $\mathcal{N}(0\,;5,65)$, et la variable T définie par $T = D/5,65$ suit la loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$. Donc :

$$\begin{aligned}
p(-h \leqslant D \leqslant h) &= p\left(-\frac{h}{5,65} \leqslant \frac{D}{5,65} \leqslant \frac{h}{5,65}\right) \\
&= p\left(-\frac{h}{5,65} \leqslant T \leqslant \frac{h}{5,65}\right) \\
&= 2\Pi\left(\frac{h}{5,65}\right) - 1
\end{aligned}$$

Pour avoir cette probabilité égale à $0,95$, il faut donc avoir $2\Pi(h/5,65) = 1,95$, soit $\Pi(h/5,65) = 0,975$. Avec la table donnée dans le formulaire, on voit que l'on doit avoir $h/5,65 = 1,96$, soit $\boxed{h = 11,074}$

b) *Énoncé de la règle de décision* :

On prélève avec remise un échantillon aléatoire de taille $n = 100$ sur la production d'une journée de la filiale MAT et on calcule la moyenne m_1 de la durée de vie, en heures, des moteurs de l'échantillon. On fait de même pour la production de la filiale MATIC et on pose $d = m_2 - m_1$.

si $d \in [-11,074\,;11,074]$ on accepte H_0.

si $d \notin [-11,074\,;11,074]$ on rejette H_0 et on accepte H_1.

c) Ici, on trouve $d = 406,8 - 398,8 = 8$. On en conclut qu'il n'y a $\boxed{\text{pas de différence significative}}$ au seuil de 5% entre les durées de vie des moteurs fabriqués par les filiales MAT et MATIC.