Brevet de technicien supérieur, session 1993

Exercice 1 : Amortissement d'une enclume, *Bts Mécanique et Automatismes Industriels, 1993*

1. À résoudre l'équation différentielle

(E) $$15z'' + 24z' + 3\,660z = 0.$$

a) L'équation caractéristique associée est
$$15r^2 + 24r + 3\,660 = 0,$$
équation dont le discrimant est $\Delta = -219\,024 = (468i)^2$, d'où les deux racines $r = -\frac{1}{5}(4 \pm 78i)$. Les solutions de l'équation (E) sont donc toutes les fonctions y ayant une écriture du type

$$\boxed{y(t) = e^{-4t/5}\left(A\cos\left(\frac{78t}{5}\right) + B\sin\left(\frac{78t}{5}\right)\right)} \quad \text{où } A \text{ et } B \text{ constantes réelles quelconques.}$$

Soit encore $\boxed{y(t) = e^{-0,8t}\left(A\cos(15,6t) + B\sin(15,6t)\right)}$.

b) Les conditions initiales sont $z(0) = -50,7 \times 10^{-3}$ et $z'(0) = 0$. La première condition donne $\boxed{A = -50,7 \times 10^{-3}}$. Et comme

$$z'(t) = e^{-0,8t}\left(-15,6A\sin(15,6t) + 15,6B\cos(15,6t) - 0,8A\cos(15,6t) - 0,8B\sin(15,6t)\right),$$

on tire de la deuxième condition la relation

$$15,6B - 0,8A = 0 \qquad \text{d'où} \qquad B = \frac{0,8}{15,6}A \qquad \text{soit} \qquad \boxed{B = -2,6 \times 10^{-3}}.$$

Finalement, la seule solution de (E) vérifiant les deux conditions initiales données est la fonction z définie par

$$\boxed{z(t) = -e^{-0,8t} \times 10^{-3} \times (50,7\cos(15,6t) + 2,6\sin(15,6t))}$$

2. *a*) On a $z(t) = 0$ si et seulement si

$$50,7\cos(15,6t) + 2,6\sin(15,6t) = 0 \iff \frac{\sin(15,6t)}{\cos(15,6t)} = -\frac{50,7}{2,6} \iff \tan(15,6t) = -19,5$$
$$\iff 15,6t = \operatorname{Arctan}(-19,5) + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \iff \boxed{t = \frac{\operatorname{Arctan}(-19,5)}{15,6} + k\frac{\pi}{15,6}, \quad k \in \mathbb{Z}}.$$

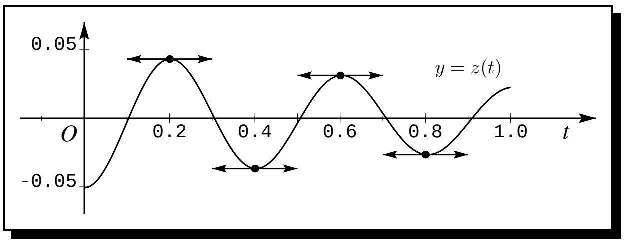
Dans l'intervalle $[0, 1]$, les solutions sont $\boxed{t \approx 0,10\,;\, t \approx 0,30\,;\, t \approx 0,51\,;\, t \approx 0,71\,;\, t \approx 0,91}$.

b) On a
$$\begin{aligned} z'(t) &= -e^{-0,8t} \times 10^{-3} \times (-0,8 \times 50,7\cos(15,6t) - 0,8 \times 2,6\sin(15,6t) \\ &\quad -15,6 \times 50,7\sin(15,6t) + 15,6 \times 2,6\cos(15,6t)) \\ &= e^{-0,8t} \times 10^{-3} \times (793\sin(15,6t)) \end{aligned}$$

D'où
$$z'(t) = 0 \iff \sin(15,6t) = 0 \iff 15,6t = k\pi \iff t = k\frac{\pi}{15,6}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Dans ce cas, $\tan(15,6t) = \tan(k\pi) = 0$, et on a une tangente horizontale. Dans l'intervalle $[0, 1]$, cela correspond aux valeurs de t suivantes : $\boxed{t \approx 0,20;\ t \approx 0,40;\ t \approx 0,60;\ t \approx 0,80}$

c) D'où la courbe de la fonction z :



Exercice 2 : Des paquets de farine, *bts MAI, 1993*

1. *a*) La variable aléatoire M suit la loi normale $\mathcal{N}(1\,000, 30)$, donc la variable aléatoire $T = (M - 1\,000)/30$ suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0, 1)$. On aura donc en particulier

$$\begin{aligned} p(\text{refus}) = p(M < 995) &= p\left(\frac{M - 1\,000}{30} < \frac{995 - 1\,000}{30}\right) \\ &= p\left(T < -\frac{1}{6}\right) = \Pi\left(-\frac{1}{6}\right) \\ &= 1 - \Pi\left(\frac{1}{6}\right) \quad \text{car la loi normale centrée réduite est paire} \\ &\approx 1 - 0,567\,5 \approx 0,432 \qquad \text{soit} \qquad \boxed{p(\text{refus}) \approx 0,432} \end{aligned}$$

b) • On effectue 100 fois de suite l'expérience qui consiste à prendre un paquet et à observer sa masse. Les expériences sont indépendantes les unes des autres, et les seules issues possibles sont « *refusé* » (avec une probabilité de 0, 07) ou non. La variable X suit donc la $\boxed{\text{loi binômiale } \mathcal{B}(100\,;0,07)}$.

Dans ce cas, on aura

$$p(X = 3) = C_{100}^{3}(0,07)^3(0,93)^{97} = \frac{100 \times 99 \times 98}{3!}(0,07)^3(0,93)^{97} \qquad \text{soit} \qquad \boxed{p(X = 3) \approx 0,049}$$

• On assimile la loi de X à une loi de Poisson. On conserve l'espérance mathématique de la loi binômiale $E(X) = 100 \times 0,07 = 7$. Le paramètre de cette loi est donc $\boxed{\lambda = 7}$. Dans ce cas, il vient

$$\begin{aligned} p(X \leqslant 5) &= p(X = 0) + p(X = 1) + p(X = 2) + p(X = 3) + p(X = 4) + p(X = 5) \\ &= 0,001 + 0,006 + 0,022 + 0,052 + 0,091 + 0,218 \end{aligned}$$

soit finalement $\boxed{p(X \leqslant 5) \approx 0,3}$

2. *a*) On veut avoir $p(\text{refus}) = 0,01$. En reprenant les calculs du **1.** *a*), on voit que l'on a

$$p(\text{refus}) = p(M < 995) = p\left(\frac{M - m}{30} < \frac{995 - m}{30}\right) = p\left(T < \frac{995 - m}{30}\right) = \Pi\left(\frac{995 - m}{30}\right)$$

De plus, on sait que l'on doit avoir $(995 - m)/30$ négatif puisque $\Pi(t) \geqslant 0,5$ pour tout réel t positif ou nul. D'où

$$p(\text{refus}) = 1 - \Pi\left(\frac{m - 995}{30}\right) \qquad \text{soit} \qquad \Pi\left(\frac{m - 995}{30}\right) = 0,99$$

La lecture du formulaire nous donne alors $(m - 995)/30 = 2,33$ (puisque $\Pi(2,33) = 0,9901$), soit $\boxed{m = 1\,064,9}$.

b) Si la variable aléatoire M suit une loi normale de moyenne $m = 1\,025$ et d'écart-type $\sigma = 30$, alors la variable aléatoire $\overline{X}$, égale à la moyenne des masses d'un échantillon de 20 paquets, suit la loi normale $\mathcal{N}(1\,025, 30/\sqrt{20})$.

La variable $\overline{T} = \dfrac{\overline{X} - m}{30/\sqrt{20}} = \dfrac{\overline{X} - 1\,025}{30/\sqrt{20}}$ suit alors la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0, 1)$.

On veut trouver le nombre a tel que $p(m - a \leqslant \overline{X} \leqslant m + a) = 0,95$. Or

$$\begin{aligned} p(m - a \leqslant \overline{X} \leqslant m + a) &= p\left(\frac{m - a - m}{30/\sqrt{20}} \leqslant \frac{\overline{X} - m}{30/\sqrt{20}} \leqslant \frac{m + a - m}{30/\sqrt{20}}\right) \\ &= p\left(\frac{-a}{30/\sqrt{20}} \leqslant \overline{T} \leqslant \frac{a}{30/\sqrt{20}}\right) = 2\Pi\left(\frac{a}{30/\sqrt{20}}\right) - 1 \\ &= 0,95 \\ \text{d'où} \qquad \Pi\left(\frac{a}{30/\sqrt{20}}\right) &= \frac{1}{2}(1 + 0,95) = 0,975 \end{aligned}$$

Dans le formulaire, on lit que $\Pi(t) = 0,975$ pour $t = 1,96$. D'où

$$a = 1,96 \times \frac{30}{\sqrt{20}} \qquad \text{soit} \qquad \boxed{a \approx 13,15}$$

L'intervalle cherché est donc $\boxed{\text{l'intervalle } [1\,011,85\,;1\,038,15]}$.