Corrigé du devoir surveillé n° 1

Exercice 1 : Un petit problème avec la fonction ln

A

1. Il vient

$$xy' - 2y = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad y' = \frac{2}{x}y$$

Une primitive de $2/x$ étant $2\ln x = \ln(x^2)$, la solution générale de l'équation (E_0) est

$$y(x) = ke^{\ln(x^2)} \qquad \text{soit} \qquad \boxed{y(x) = kx^2, \qquad k \in \mathbb{R}}$$

2. On a

$$g(x) = \frac{1}{2} + \ln x, \qquad \text{d'où} \qquad g'(x) = \frac{1}{x}.$$

Il est alors facile de vérifier que $xg' - 2g = -2\ln x$, ce qui prouve que $\boxed{g \text{ est une solution particulière de } (E)}$.

3. La solution générale de (E) est donc $\boxed{y(x) = kx^2 + \frac{1}{2} + \ln x, \qquad k \in \mathbb{R}}$.

4. Si f est solution de (E), alors $f(1) = k + 1/2$. La condition initiale impose donc

$$k + \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \qquad \text{soit} \qquad k = -\frac{1}{4} \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{f(x) = -\frac{x^2}{4} + \frac{1}{2} + \ln x}.$$

B

1. *a*) On a facilement $\boxed{\lim_{x\to 0} f(x) = -\infty}$ puisque $\lim_{x\to 0} x^2 = 0$ et $\lim_{x\to 0} \ln x = -\infty$.

b) On trouve

$$f'(x) = -\frac{x}{2} + \frac{1}{x} \qquad \text{soit} \qquad \boxed{f'(x) = \frac{2 - x^2}{2x}}$$

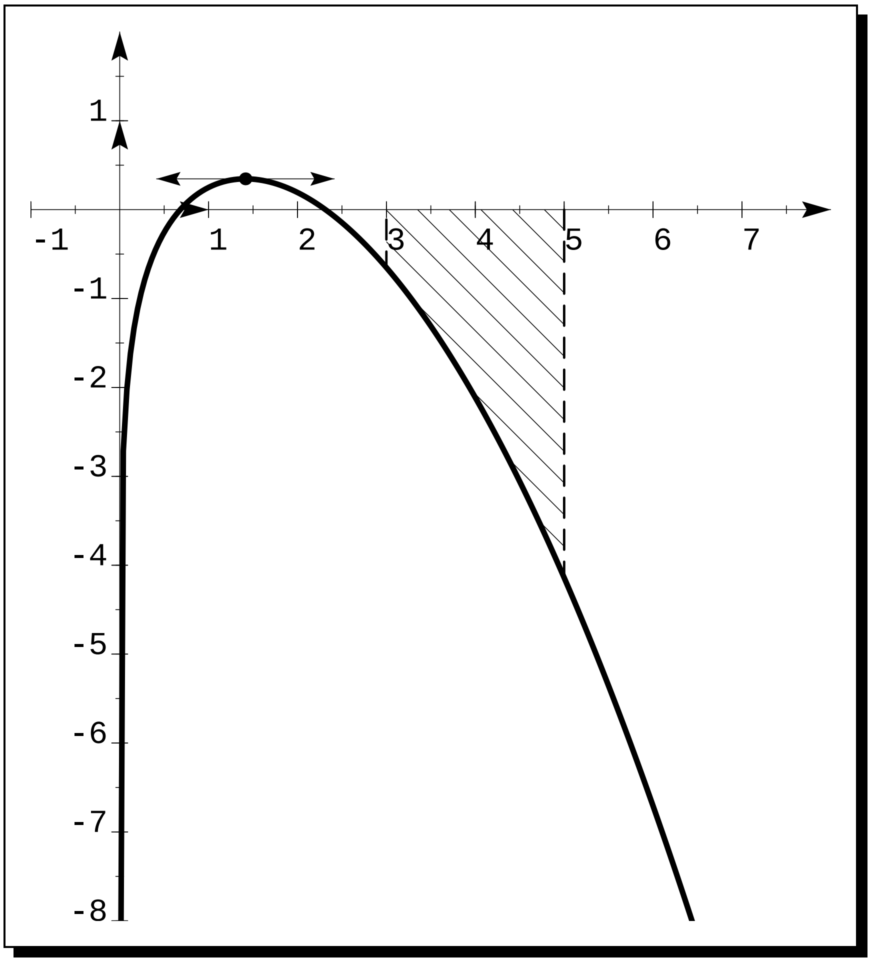
qui est du signe de $2 - x^2$ puisque $2x$ est toujours positif sur l'intervalle considéré. Or $2 - x^2$ est un polynôme du second degré qui admet 2 racines réelles ($\sqrt{2}$ et $-\sqrt{2}$) et qui est positif entre ces racines (signe de $-a$). D'où le tableau de variations de f :

x	0		$\sqrt{2}$		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	‖ $-\infty$	↗	$\frac{1}{2}\ln 2$	↘	$-\infty$

2. *a*) La fonction f est strictement décroissante sur l'intervalle $[\sqrt{2}, +\infty[$ et elle change de signe sur cet intervalle (puisque $f(\sqrt{2})$ est positif alors que $\lim_{+\infty} f(x)$ est négatif). On peut légitimement en conclure que la fonction f $\boxed{\text{s'annule une et une seule fois sur } [\sqrt{2}, +\infty[}$.

b) Et cette racine α vérifie $\boxed{2,31 < \alpha < 2,32}$ puisque $f(2,31)$ est positif alors que $f(2,32)$ est négatif.

3.



4. Il vient

$$H'(x) = \ln x + \frac{x}{x} - 1 \qquad \text{soit} \qquad H'(x) = \ln x.$$

donc H est bien $\boxed{\text{une primitive de la fonction ln}}$.

a) La fonction f étant négative sur $[3, 5]$, une mesure en unité d'aire du domaine plan demandé sera :

$$\mathcal{A} = -\int_3^5 f(x)\,dx = -\int_3^5 -\frac{x^2}{4} + \ln x + \frac{1}{2}\,dx = -\left[-\frac{x^3}{12} + H(x) + \frac{1}{2}x\right]_3^5 = \left[\frac{x^3}{12} - x\ln x + \frac{1}{2}x\right]_3^5$$

On trouve, après calculs, et en tenant compte du fait qu'une unité d'aire vaut 4 cm^2 :

$$\boxed{\mathcal{A} = 4\left(\frac{55}{6} - 5\ln 5 + 3\ln 3\right)\text{cm}^2 \approx 17,66\,\text{cm}^2\,.}$$

Exercice 2 : Second ordre, avec une exponentielle

1. L'équation caractéristique de (E_0) est $r^2 + 4r + 3 = 0$, et elle possède deux racines réelles : $r_1 = -1$ et $r_2 = -3$. L'ensemble des solutions de (E_0) est donc constitué de toutes les fonctions pouvant s'écrire sous la forme

$$\boxed{y(x) = Ae^{-x} + Be^{-3x}} \qquad \text{où } A \text{ et } B \text{ sont des constantes réelles quelconques.}$$

2. Si $h(x) = Ae^{-2x}$, alors $h'(x) = -2Ae^{-2x}$ et $h''(x) = 4Ae^{-2x}$. On aura alors $h''+4h'+3h = -Ae^{-2x}$. Pour que h soit solution de (E), il faut prendre $A = -1$. La solution particulière cherchée est donc la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $\boxed{h(x) = -e^{-2x}}$.
3. L'ensemble des solutions de (E) est constitué de toutes les fonctions pouvant s'écrire sous la forme

$$\boxed{y(x) = -e^{-2x} + Ae^{-x} + Be^{-3x}}$$

où A et B sont des constantes réelles quelconques.

4. Si f est une solution de (E), alors elle admet une écriture comme ci-dessus, et on aura $f'(x) = 2e^{-2x} - Ae^{-x} - 3Be^{-3x}$. Finalement, on aura donc

$$f(0) = -1 + A + B \qquad \text{et} \qquad f'(0) = 2 - A - 3B.$$

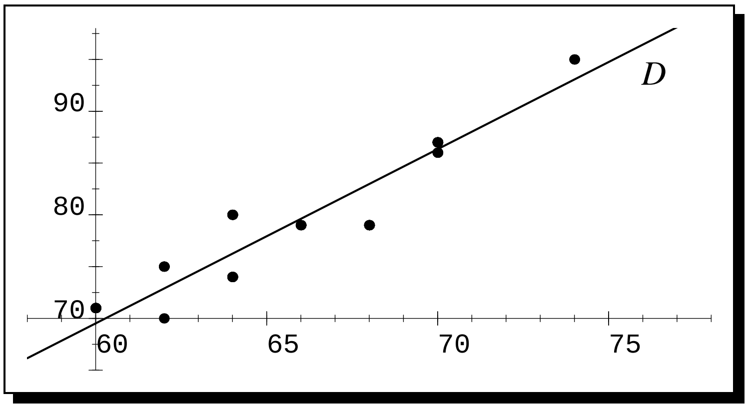
Pour que f vérifie les conditions initiales imposées, A et B doivent vérifier le système

$$\begin{cases} A + B = 1 \\ A + 3B = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} B = 1/2 \\ A = 1/2 \end{cases}$$

d'où la solution cherchée $\boxed{f(x) = -e^{-2x} + \frac{1}{2}e^{-x} - \frac{1}{2}e^{-3x}}$

Exercice 3 : Méthode des moindres carrés : charge de rupture d'un acier

1.



2. Pour le point moyen, on calcule la moyenne arithmétique de chacun des caractères. On trouve ainsi

$$\boxed{G\ :\ \left(66; \frac{398}{5}\right)} \qquad \text{soit} \qquad \boxed{G\ :\ (66; 79,6)}$$

3. On trouve successivement

$$\bar{x} = 66, \qquad \sigma(x) = \frac{2}{5}\sqrt{110} \simeq 4,195\ ; \qquad \text{et} \qquad \bar{y} = 79,6\ ; \qquad \sigma(y) = \frac{1}{5}\sqrt{1381} \simeq 7,432$$

Le calcul de la covariance et du coefficient de corrélation linéaire par les formules

$$\sigma_{xy} = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right) - \bar{x}\bar{y}, \qquad \text{et} \qquad r = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma(x) \times \sigma(y)}$$

donne alors

$$\boxed{\sigma_{xy} = \frac{148}{5} = 29,6} \qquad \text{et} \qquad \boxed{r \simeq 0,949}$$

Le coefficient de corrélation étant plutôt « bon » (ie « proche » de 1), une approximation affine paraît adaptée.

4. La droite D de régression de y en x possède une équation de la forme $y = ax + b$, où a et b vérifient

$$a = \frac{\sigma_{xy}}{[\sigma(x)]^2}, \quad \text{soit} \quad \boxed{a = \frac{37}{22} \simeq 1,682} \qquad \text{et} \qquad \bar{y} = a\bar{x} + b, \quad \text{soit} \quad \boxed{b = -\frac{157}{5} = -31,4}$$

d'où l'équation cherchée : $\boxed{D : y = 1,682x - 31,4}$

5. En utilisant cette droite de régression, on trouve alors pour une teneur en carbone de $x = 77$, une charge de rupture de $\boxed{y \simeq 98,114\,\text{kg}}$.