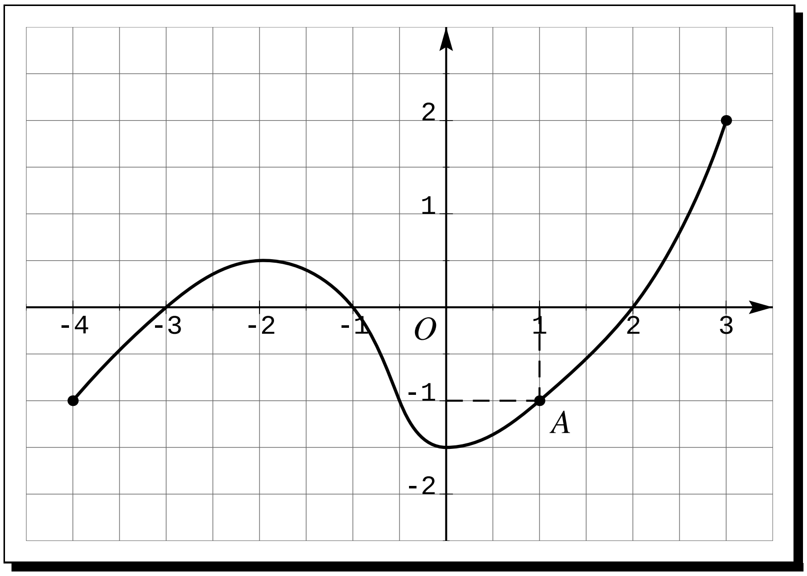
Devoir surveillé n° 5

durée : 2h

Exercice 1 : (*5 points*) **Lecture de graphique**

On a représenté ci-dessous la courbe représentative d'une fonction f.



En utilisant le graphique, répondre qux questions :

1. Donner l'ensemble de définition de f.
2. a) Quelles sont les coordonnées du point A ?
   b) Traduire le résultat en utilisant les mots « *image* » ou « *antécédent* ».
3. Déterminer l'image par f de -2, puis de $1,5$.
4. Déterminer le(s) antécédent(s) par f de -1, puis de 2.
5. Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = 0$.
6. Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) \leqslant -1$.
7. Quel est le maximum de f ? Pour quel nombre x est-il atteint ?
8. Quel est le minimum de f ? Pour quel nombre x est-il atteint ?

Exercice 2 : (*5 points*) **Images de nombres par une fonction**

On considère les fonctions numériques f et g définies par

$$f(x) = \frac{3x-1}{x-3} \qquad \text{et} \qquad g(x) = -x^2 + 4x + 3.$$

1. Déterminer les images par f des nombres $\frac{19}{3}$ et $3+\sqrt{5}$. On donnera les résultats sous forme de fraction irrductible ou sans radical au dénominateur.
2. Calculer :

   a) $g(-1)$ b) $g(2)$ c) $g\left(1+\sqrt{5}\right)$

   en simplifiant au mieux les résultats obtenus.
3. Le point de coordonnées $(\sqrt{3}; 0)$ apprtient-il à la courbe représentative de g ? (Justifier votre réponse.)

Exercice 3 : (*2 points*) **Des puissances**. . .

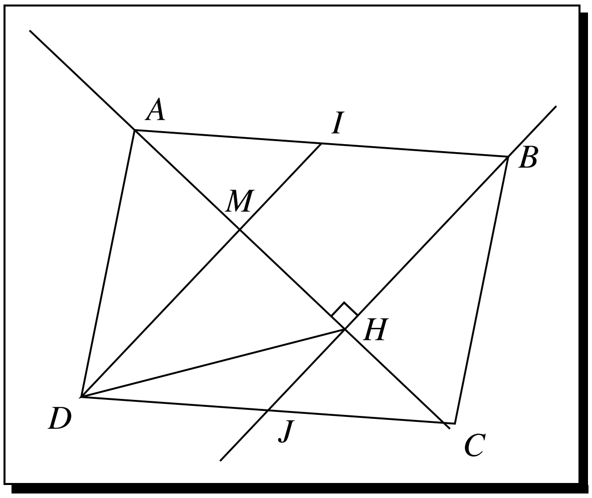
1. Montrer que : $8^{2002} + 8^{2003} = 8^{2002} \times 9$.
2. En remarquant que $8 = 2^3$ et en utilisant la question précédente, écrire $8^{2002} + 8^{2003}$ sous la forme d'un produit de facteurs de nombres premiers.

Exercice 4 : (*4 points*) **Parallélogramme et triangle isocèle**

Dans le parallélogramme $ABCD$ ci-dessous :

- I et J sont les milieux respectifs des segments $[AB]$ et $[CD]$;
- H est le pied de la perpendiculaire à la droite (BJ) passant par A ;
- M est l'intersection des droites (DI) et (AH).

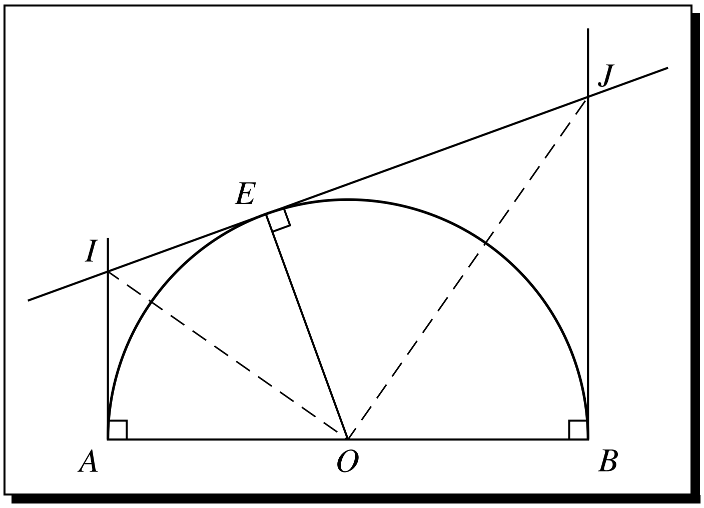
Le but de l'exercice est de démontrer que le triangle AHD est isocèle.



1. Démontrer que le quadrilatère $DJBI$ est un parallélogramme.
2. Démontrer que les droites (AH) et (DI) sont perpendiculaires.
3. Montrer que la droite (DI) est la médiatrice du segment $[AH]$.
4. Conclure.

Exercice 5 : (*4 points*) **Tangentes à un cercle, triangles semblables**

Sur la figure ci-dessous, E est un point du demi-cercle $\mathcal{C}$ de diamètre $[AB]$ er de rayon R.
La tangente en E à $\mathcal{C}$ coupe la tangente en A à $\mathcal{C}$ en I et la tangente en B à $\mathcal{C}$ en J.



1. *a*) Montrer que les triangles OAI et OEI sont isométriques.
   Citer sans justifier deux autres triangles isométriques.
   b) En déduire que le triangle IOJ est rectangle.
2. *a*) Montrer que les triangles OEI et OEJ sont semblables.
   b) En déduire que

$$IE \times EJ = R^2, \qquad \text{puis que} \qquad AI \times BJ = R^2.$$