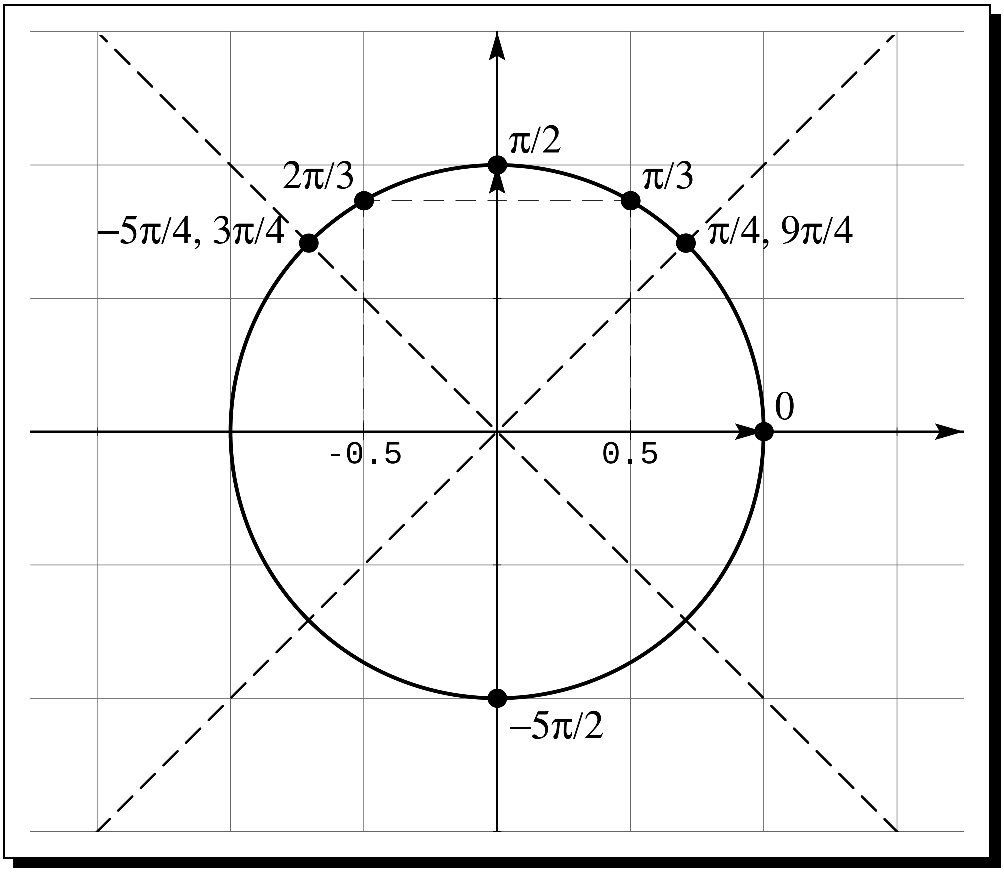
Corrigé du devoir surveillé n° 10

Exercice 1 : Cercle trigonométrique, équations

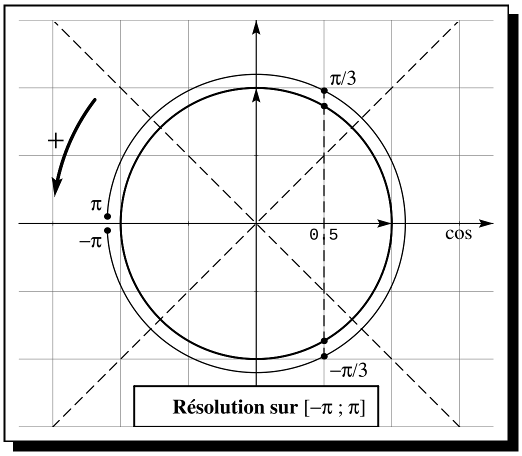
1. *a*)

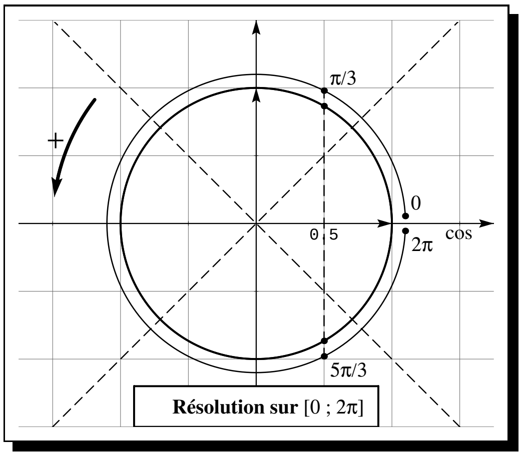


b) Vu les symétries du cercle, et connaissant les cosinus et sinus de $\pi/3$, on en déduit aisément

$$\boxed{\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}} \qquad \text{et} \qquad \boxed{\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}}.$$

2. *a*) *b*)

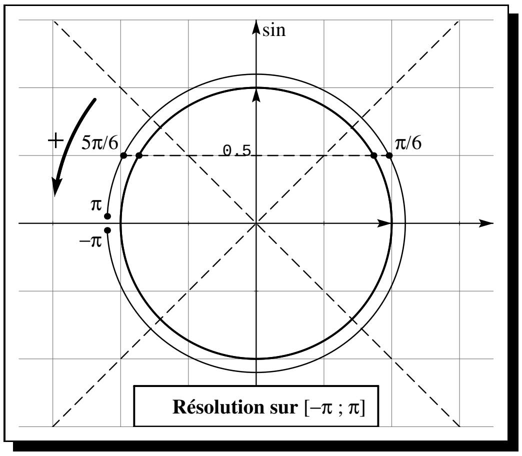




On lit sur le cercle trigonométrique les solutions de nos deux équations. On trouve ainsi

$\boxed{\text{2 solutions sur } [-\pi;\pi]) : \pi/3 \text{ et } -\pi/3}$, et $\boxed{\text{2 solutions sur } [0;2\pi] : \pi/3 \text{ et } 5\pi/3}$.

3. De la même façon, on trouve les 2 solutions sur $[-\pi;\pi]$ de l'équation $\sin x = 1/2$: $\boxed{\pi/6 \text{ et } 5\pi/6}$.



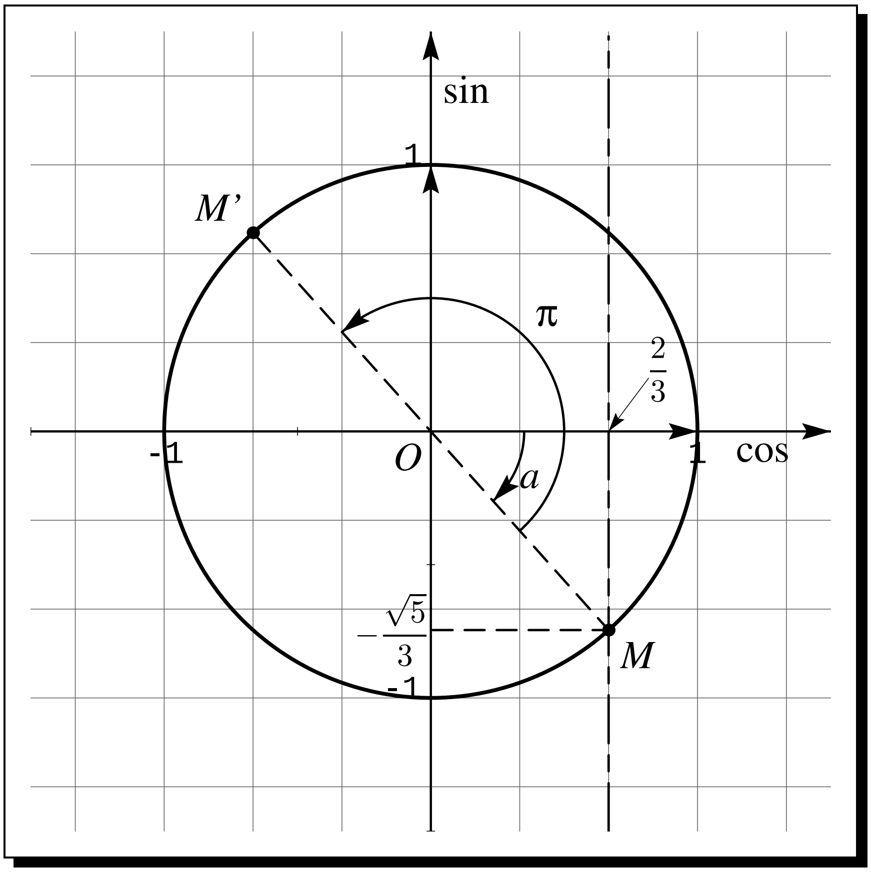
4. On connaît le cosinus du nombre x et on cherche son sinus. Sachant que l'on a toujours $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, il vient facilement

$$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x = 1 - \left(-\frac{4}{5}\right)^2 = 1 - \frac{16}{25} \qquad \text{soit} \qquad \sin^2 x = \frac{9}{25}.$$

À ce stade, on a donc 2 possibilités : soit $\sin x = \sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{3}{5}$, soit $\sin x = -\sqrt{\frac{9}{25}} = -\frac{3}{5}$. Mais comme l'on sait que $x \in [0;\pi]$, on en déduit que son sinus est positif. La seule solution possible est donc $\boxed{\sin x = \frac{3}{5}}$.

Exercice 2 : Un point du cercle trigonométrique

1.



2. On sait que l'on a toujours $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$. Utilisée en $x = a$, et connaissant $\cos a$, cette relation nous donne

$$\sin^2 a = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9} \qquad \text{d'où} \qquad \sin a = \sqrt{\frac{5}{9}} \quad \text{ou} \quad \sin a = -\sqrt{\frac{5}{9}}$$

Sachant maintenant que $a \in]-\pi/2; 0[$, on en déduit que $\sin a$ est négatif. Ce qui permet de conclure :

$$\boxed{\sin a = -\frac{\sqrt{5}}{3}}.$$

3. Par symétrie, on en déduit que les coordonnées de M' sont $\boxed{M'\left(-\frac{2}{3}; \frac{\sqrt{5}}{3}\right)}$.

Exercice 3 : Le « monstre »

1. 180° correspondent à π radians, donc 60° correspondent à $\boxed{\frac{\pi}{3}\text{ rd}}$.

2. Le périmètre est constitué de 3 parties : un arc circulaire correspondant à un angle de $2\pi - \pi/3$, et deux segments de droites de longueur le rayon du cercle. Le rayon du cercle étant de 1 cm, on a immédiatement le périmètre cherché : $\boxed{p = \frac{5\pi}{3} + 2}$.

Exercice 4 : Parité, périodicité…

1. Il vient
$$f(-x) = \cos^2(-x) = \cos^2 x \qquad \text{puisque la fonction cos est paire}$$
On a donc $f(-x) = f(x)$, ce qui prouve que $\boxed{\text{la fonction } f \text{ est paire}}$.

2. On remarque tout d'abord que l'on a $\cos(x + \pi) = -\cos x$ pour tout x réel. Il vient alors
$$f(x + \pi) = \cos^2(x + \pi) = (-\cos x)^2 = \cos^2 x = f(x),$$
ce qui prouve que $\boxed{\text{la fonction } f \text{ est périodique de période } \pi}$.

Exercice 5 : Inéquation polynomiale

Il vient
$$4x - 5x^2 \geqslant 0 \iff x(4 - 5x) \geqslant 0$$
Un tableau de signes permet alors de conclure :

x	$-\infty$		0		$4/5$		$+\infty$
x		$-$	0	$+$		$+$	
$5 - 4x$		$+$		$+$	0	$-$	
produit		$-$	0	$+$	0	$-$	

d'où : $\boxed{4x - 5x^2 \geqslant 0 \iff x \in [0; 4/5]}$.
