Corrigé du devoir surveillé n° 6

Exercice 1 : Équations de droites, représentations de fonctions

1. Les fonctions f_1, f_2 et f_3 sont affines, donc elles ont une expression du type

$$f_1(x) = a_1x + b_1 \qquad f_2(x) = a_2x + b_2. \qquad \text{et} \qquad f_3(x) = a_3x + b_3.$$

• Les point $A(1;2)$ et $B(-1;1)$ sont sur la courbe de f_1. D'où

$$a_1 = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1-2}{-1-1} = \frac{1}{2}.$$

Et comme $f_1(1) = 2$, on a

$$2 = \frac{1}{2} \times 1 + b_1 \qquad \text{d'où} \qquad b_1 = \frac{3}{2}.$$

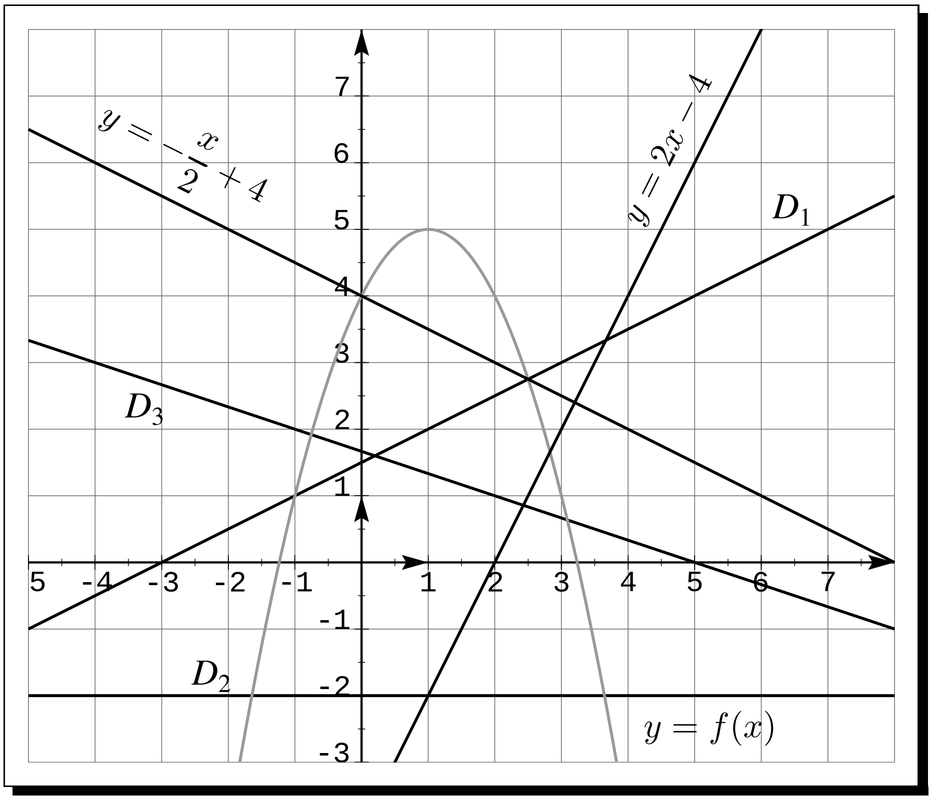
En conclusion $\boxed{f_1(x) = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}}$.

• En raisonnant de la même façon, on trouve $(a_2, b_2) = (0, -2)$, soit $\boxed{f_2(x) = -2}$.

• Pour la droite D_3, utilisons les points $C(-1;2)$ et $D(2;1)$. La méthode utilisée pour D_1 nous donne facilement $a_3 = -1/3$. Rest à utiliser le fait que D est sur D_3 pour obtenir l'équation

$$1 = 2a_3 + b_3 \quad \Longrightarrow \quad 1 = 2 \times \frac{-1}{3} + b_3 \quad \Longrightarrow \quad b = \frac{5}{3} \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{f_3(x) = -\frac{1}{3}x + \frac{5}{3}}.$$

2.



3.

x	-3	-2	$-1,5$	-1	$-0,5$	0	$0,5$	1	$1,5$	2	3
$h(x)$	-11	-4	$-1,25$	1	2.75	4	$4,75$	5	$4,75$	4	1

Exercice 2 : Images et antécédents, lecture de graphique

A

1. On voit sur le graphique que la courbe de f n'existe que pour les réels x entre -3 et 5. D'où l'ensemble de définition de f : $\boxed{\mathcal{D} = [-3;5]}$.

2. Graphiquement, on lit que $f(x)$ est strictement positive si et seulement si $\boxed{x \in [-3;-1[\cup]3;5]}$.

3. On lit sur le graphique : $\boxed{f(2) \approx -3}$.

4. Toujours graphiquement, on trouve $\boxed{\text{2 antécédents pour } -3 : 0 \text{ et } 2}$.

B

1. *a*) On reconnaît une identité remarquable dans l'écriture proposée pour $f(x)$. Il vient alors

$$\begin{aligned} f(x) &= (x-1)^2 - 4 = (x-1)^2 - 2^2 \\ &= (x-1-2)(x-1+2) \qquad \text{soit} \qquad \boxed{f(x) = (x-3)(x+1)}. \end{aligned}$$

b) Quant à l'écriture développée, on obtient facilement $\boxed{f(x) = x^2 - 2x - 3}$.

2. Pour les images demandées, et en utilisant l'écriture $f(x) = (x-1)^2 - 4$, il vient

- $f\left(-\frac{1}{4}\right) = \left(-\frac{5}{4}\right)^2 - 4 = \frac{25}{16} - \frac{4 \times 16}{16}$ soit $\boxed{f\left(-\frac{1}{4}\right) = -\frac{39}{16}}$
- $f(\sqrt{2}) = (\sqrt{2}-1)^2 - 4 = 2 + 1 - 2\sqrt{2} - 4$ soit $\boxed{f(\sqrt{2}) = -1 - 2\sqrt{2}}$
- $f(1+\sqrt{3}) = (\sqrt{3})^2 - 4$ soit $\boxed{f(1+\sqrt{3}) = -1}$

3. En prenant l'écriture factorisée pour f, l'équation proposée se résoud immédiatement puisque l'on a un produit de facteurs égal à 0. D'où

$$f(x) = 0 \iff (x-3)(x+1) = 0 \iff \boxed{x \in \{3;-1\}}.$$

4. Il s'agit de résoudre l'équation $f(x) = -3$. En utilisant l'expression développée de $f(x)$, il vient

$$x^2 - 2x - 3 = -3 \iff x^2 - 2x = 0 \iff x(x-2) = 0$$

Comme on a un produit de facteurs égal à 0, on obtient immédiatement les deux solutions. D'où l'ensemble des solutions : $\boxed{\mathcal{S} = \{0;2\}}$.

Exercice 3 : Déterminer l'expression d'une fonction affine

On a deux inconnues a et b. Les deux hypothèses vont nous donner deux équations. Un système nous permettra de conclure. Il vient donc

$$\begin{cases} f(\sqrt{3}) = 1 \\ f(1) + f(\sqrt{3}) = \sqrt{3} - 1 \end{cases} \iff \begin{array}{l} (1) \\ (2) \end{array} \begin{cases} a\sqrt{3} + b = 1 \\ a + b + a\sqrt{3} + b = \sqrt{3} - 1 \end{cases} \iff \begin{array}{c} (1) \\ (2) - 2 \times (1) \end{array} \begin{cases} a\sqrt{3} + b = 1 \\ a - a\sqrt{3} = \sqrt{3} - 3 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a\sqrt{3} + b = 1 \\ a(1-\sqrt{3}) = \sqrt{3} - 3 \end{cases} \iff \begin{cases} a\sqrt{3} + b = 1 \\ a = \frac{\sqrt{3}-3}{1-\sqrt{3}} = \frac{(\sqrt{3}-3)(1+\sqrt{3})}{(1-\sqrt{3})(1+\sqrt{3})} \end{cases} \iff \begin{cases} 3 + b = 1 \\ a = \sqrt{3} \end{cases}$$

d'où l'expression de f : $\boxed{f(x) = \sqrt{3}x - 2}$.
