Corrigé du devoir surveillé n° 4

Exercice 1 : Manipulation d'expressions polynomiales

1. Il vient
$$E(x) = 2x^2 - 3x - 2 - (x^2 + 2x - 8) \qquad \text{soit} \qquad \boxed{E(x) = x^2 - 5x + 6}.$$

2. *a*) En reprenant l'expression initiale, il vient
$$E(x) = (2x+1)(x-2) - (x-2)(x+4) = (x-2)\big[(2x+1) - (x+4)\big] \qquad \text{soit} \qquad \boxed{E(x) = (x-2)(x-3)}.$$

b) Et le développement de cette dernière expression donne bien $\boxed{(x-2)(x-3) = x^2 - 5x + 6}$.

3. On utilise la forme factorisée de E, en invoquant le fait qu'un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un des facteurs est nul. On a alors immédiatement :
$$E(x) = 0 \iff (x-2)(x-3) = 0 \iff \boxed{x = 2 \text{ ou } x = 3}.$$

4. On utilise cette fois la forme développée de E. Il vient
$$E(x) = 6 \iff x^2 - 5x + 6 = 6 \iff x^2 - 5x = 0 \iff x(x-5) = 0 \iff \boxed{x = 0 \text{ ou } x = 5}.$$

Exercice 2 : Polynôme de degré 2

Il vient
$$(x-3)^2 = 16 \iff (x-3)^2 - 4^2 = 0 \iff (x-3-4)(x-3+4) = 0 \iff (x-7)(x+1) = 0$$

On a un produit de facteurs égal à zéro, donc l'un des facteurs est nul, et on a facilement les deux solutions : $\boxed{x = 7 \text{ et } x = -1}$.

Exercice 3 : Une équation rationnelle

a) Pour que $A(x)$ soit calculable, on doit avoir $7 - 3x \neq 0$, et donc $x \neq 7/3$. En conclusion, $A(x)$ est calculable pour $\boxed{\text{tous les réels } x \neq 7/3}$, autrement dit pour tous les nombres de l'ensemble $\boxed{\mathbb{R} - \{7/3\}}$

b) Il vient
$$A(x) = 0 \iff \frac{x^2(x-7)}{(7-3x)} = 0 \iff x^2(x-7) = 0 \iff x = 0 \quad \text{ou} \quad x - 7 = 0$$

d'où les $\boxed{\text{deux solutions : } x = 0 \text{ et } x = 7}$.

Exercice 4 : Équation rationnelle

Il vient
$$\begin{aligned}\frac{5-2x}{x+1} = 5 - 2x &\iff 5 - 2x = (5-2x)(x+1) \\ &\iff (5-2x)\big(1 - (x+1)\big) = 0 \\ &\iff (5-2x)(-x) = 0\end{aligned}$$

On a un produit de facteurs égal à zéro, donc l'un des facteurs et nul, d'où les deux solutions : $\boxed{x = 0 \text{ et } x = 5/2}$.

Exercice 5 : Équation rationnelle

On remarque tout d'abord que l'équation proposée n'a un sens que si $\boxed{x \neq 0}$ et $\boxed{x \neq -4}$. On se place donc sous ces hypothèses dans tout le reste de l'exercice.

1ère méthode : le produit en croix.

Il vient

$$\frac{x+1}{x+4} = \frac{1}{x} \iff x(x+1) = x+4 \iff x^2 + x - x - 4 = 0$$
$$\iff x^2 - 4 = 0 \iff (x-2)(x+2) = 0$$

d'où les $\boxed{\text{deux solutions dans } \mathbb{R} : 2 \text{ et } -2}$ (puisque l'on a un produit de facteurs égale à 0).

2ème méthode : Réduction au même dénominateur.

Il vient

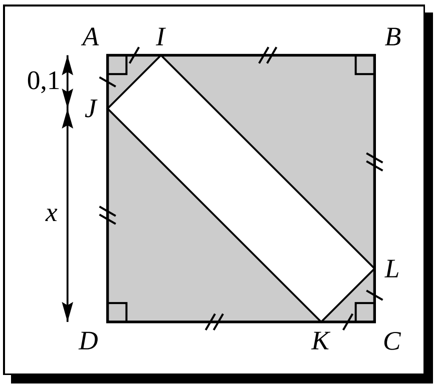
$$\frac{x+1}{x+4} = \frac{1}{x} \iff \frac{x+1}{x+4} - \frac{1}{x} = 0 \iff \frac{x^2 + x - x - 4}{x(x+4)} = 0$$
$$\iff \frac{x^2 - 4}{x(x+4)} = 0 \iff \frac{(x-2)(x+2)}{x(x+4)} = 0 \iff (x-2)(x+2) = 0$$

d'où les $\boxed{\text{deux solutions dans } \mathbb{R} : 2 \text{ et } -2}$.

Exercice 6 : Bande à part

Posons x la longueur inconnue JD, et exprimons toutes les quantités en mètres.

Les triangles IBL et KDJ sont rectangles isocèles de côté x, cependant que les triangles AIJ et LCK sont rectangles isocèles de côté $0,1$. Le carré $ABCD$ est de côté $x + 0,1$.



L'aire du carré $ABCD$ étant égale à la somme des aires de ses parties, il vient

$$\mathcal{A}(ABCD) = \mathcal{A}(AIJ) + \mathcal{A}(LCK) + \mathcal{A}(IBL) + \mathcal{A}(KDJ) + \mathcal{A}(IJKL)$$
$$\iff (x + 0,1)^2 = \frac{1}{2}(0,1)^2 + \frac{1}{2}(0,1)^2 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^2 + 1$$
$$\iff x^2 + 2 \times 0,1 \times x + (0,1)^2 = (0,1)^2 + x^2 + 1$$
$$\iff 2 \times 0,1 \times x = 1$$
$$\iff x = \frac{1}{2 \times 0,1} = \frac{1}{2 \times \frac{1}{10}} = \frac{1}{\frac{2}{10}} = \frac{10}{2} = 5$$

D'où l'unique solution : $\boxed{x = 5\,\mathrm{h}}$ et le côté du carré est $\boxed{AB = 5,1\,\mathrm{h}}$.

Exercice 7 : Équation polynomiale de degré 2

Il vient

$$(x+2)^2 = x^2 - 4 \iff (x+2)^2 - (x-2)(x+2) = 0 \iff (x+2)(x+2-x+2) = 0 \iff (x+2)(4) = 0$$

d'où l'unique solution : $\boxed{x = -2}$.
