Corrigé du devoir surveillé n° 3

Exercice 1 : Équation polynomiale de degré 2

En développant l'équation proposée, il vient

$$\begin{aligned} x(2x-1)+4=(x-2)^2 &\iff 2x^2-x+4-(x^2-4x+4)=0 \\ &\iff x^2+3x=0 \\ &\iff x(x+3)=0 \end{aligned}$$

On a un produit de facteurs égal à 0, donc l'un des facteurs est nul. On en déduit alors les

$$\boxed{\text{2 solutions : } x=0 \text{ et } x=-3}.$$

Exercice 2 : Équation polynomiale de degré 2 (facteur commun)

Il vient

$$\begin{aligned} (3-2x)(x+7)=3-2x &\iff (3-2x)(x+7)-(3-2x)=0 \\ &\iff (3-2x)\big((x+7)-1\big)=0 \\ &\iff (3-2x)(x+6)=0 \end{aligned}$$

On a un produit de facteurs égal à 0, donc l'un des facteurs est nul. On en déduit alors les

$$\boxed{\text{2 solutions : } x=3/2 \text{ et } x=-6}.$$

Exercice 3 : Équation polynomiale de degré 2 (identité remarquable)

Il vient

$$\begin{aligned} (x+1)^2=3 &\iff (x+1)^2-\left(\sqrt{3}\right)^2=0 \\ &\iff (x+1-\sqrt{3})(x+1-\sqrt{3})=0 \end{aligned}$$

On a un produit de facteurs nul, donc l'un des facteurs est nul. D'où les

$$\boxed{\text{2 solutions : } x=-1+\sqrt{3} \text{ et } x=-1-\sqrt{3}}.$$

Exercice 4 : Équation polynomiale de degré 2 (facteur commun)

Il vient

$$\begin{aligned} (2x+3)(7-x)=(x-7)(2x-3). &\iff (2x+3)(7-x)-(x-7)(2x-3)=0 \\ &\iff (2x+3)(7-x)+(-x+7)(2x-3)=0 \\ &\iff (7-x)\big((2x+3)+(2x-3)\big)=0 \\ &\iff (7-x)(4x)=0 \end{aligned}$$

On a un produit de facteurs nul, donc l'un des facteurs est nul. D'où les $\boxed{\text{2 solutions : } x=7 \text{ et } x=0}$.

Remarque : ici, on aurait aussi pu développer entièrement l'équation proposée, pour factoriser ensuite par le facteur commun évident x.

Exercice 5 : Triangles semblables. . .

1. Les angles $\widehat{DAC}$ et $\widehat{BAE}$ sont opposés par le sommet, donc $\boxed{\widehat{DAC} = \widehat{BAE}}$. De plus, on a

$$\frac{AB}{AD} = \frac{28}{21} = \frac{4 \times 7}{3 \times 7} = \frac{4}{3} \quad \text{et} \quad \frac{AE}{AC} = \frac{96}{72} = \frac{4 \times 24}{3 \times 24} = \frac{4}{3} \quad \text{d'où} \quad \boxed{\frac{AB}{AD} = \frac{AE}{AC} = \frac{4}{3}}$$

Finalement, les deux triangles BAE et DAC ont un angle égal compris entre deux côtés respectivement proportionnels, ce qui prouve que $\boxed{BAE \text{ et } DAC \text{ sont semblables}}$.

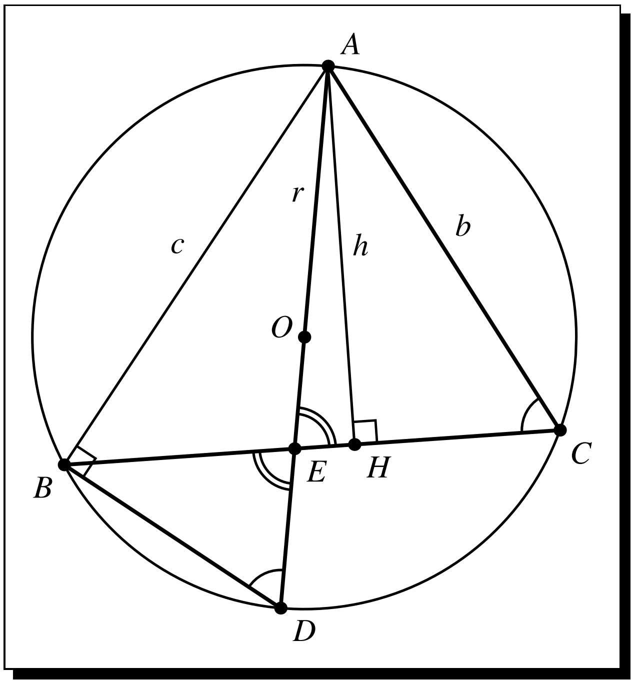
2. On vient de voir que le rapport de proportionnalité qui transforme DAC en BAE était de $4/3$, le rapport entre les aires de ces triangles est donc de $(4/3)^2 = 16/9$. Plus précisément,

$$\boxed{\text{aire }(DAC) = \frac{16}{9}\text{ aire }(BAE)}$$

Exercice 6 : Cercle et triangles semblables

1. Les points A, B, C, D sont sur le même cercles, et les angles $\widehat{BDA}$ et $\widehat{BCA}$ interceptent le même arc de cercle AB. Donc $\widehat{BDA} = \widehat{BCA}$, soit $\boxed{\widehat{D} = \widehat{C}}$. De plus, les angles $\widehat{BED}$ et $\widehat{AEC}$ sont opposés par les sommet, dont $\boxed{\widehat{BED} = \widehat{AEC}}$.

Finalement, les triangles DBE et CAE ont deux angles deux à deux égaux, ce qui prouve qu' $\boxed{\text{ils sont semblables}}$.



2. On remarque que $[AD]$ est un diamètre du cercle $\mathcal{C}$ et B est un point de ce cercle, donc ABD est un triangle rectangle en B, d'où $\boxed{\widehat{ABD} = 90° = \widehat{AHC}}$. Les deux triangles $\boxed{ABD \text{ et } AHC}$ sont donc semblables puisqu'ils ont deux angles égaux deux à deux

Maintenant, dans les triangles semblables ABD et AHC, on a

$$\frac{AB}{AH} = \frac{c}{h} = \frac{AD}{AC} = \frac{2r}{b} \quad \text{et donc} \quad \boxed{bc = 2rh}.$$
