Corrigé du devoir surveillé n° 2

Exercice 1 : Intersection/réunion d'intervalles

On trouve

$a)$ $\boxed{I = [-1; 4]}$ $b)$ $\boxed{J =]-\infty; 4[}$ $c)$ $\boxed{K = \emptyset}$

Exercice 2 : Fraction et racines carrées

Comme $27 = 3^3$, on a $\sqrt{27} = 3\sqrt{3}$, d'où

$$A = \frac{5\sqrt{3} - \sqrt{27}}{\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}} = (5\sqrt{3} - 3\sqrt{3}) \times \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3} \times \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \quad \text{soit} \quad \boxed{A = 4\sqrt{2}}$$

Exercice 3 : Égalité de deux nombres

Pour montrer l'églité de 2 nombres, il suffit de montrer que leur différence est nulle. En remarquant que $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$, il vient alors

$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt{8}+33}{7-\sqrt{2}} = \sqrt{2}+5 \quad &\Longleftrightarrow \quad \frac{\sqrt{8}+33}{7-\sqrt{2}} - (\sqrt{2}+5) = 0 \\
&\Longleftrightarrow \quad \frac{2\sqrt{2}+33}{7-\sqrt{2}} - \frac{(\sqrt{2}+5)(7-\sqrt{2})}{7-\sqrt{2}} = 0 \\
&\Longleftrightarrow \quad \frac{2\sqrt{2}+33-(7\sqrt{2}-2+35-5\sqrt{2})}{7-\sqrt{2}} = 0 \\
&\Longleftrightarrow \quad \frac{2\sqrt{2}+33-(2\sqrt{2}+33)}{7-\sqrt{2}} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad 0 = 0
\end{aligned}$$

La dernière égalité étant toujours vraie, la première l'est aussi, et on a $\boxed{\text{montré la propriété demandée}}$.

Exercice 4 : Triangle rectangle et trigonométrie

1. *a)* En utilisant tangente = opposé/adjacent dans les triangles rectangles ABN et ABM, il vient

$$\tan 40^\circ = \frac{AB}{NB} \quad \text{d'où} \quad \boxed{NB = \frac{AB}{\tan 40^\circ}} \qquad \text{et} \qquad \tan 55^\circ = \frac{AB}{MB} \quad \text{d'où} \quad \boxed{MB = \frac{AB}{\tan 55^\circ}}$$

b) En remarquant que $\boxed{NB = 12 + MB}$, il vient alors l'égalité

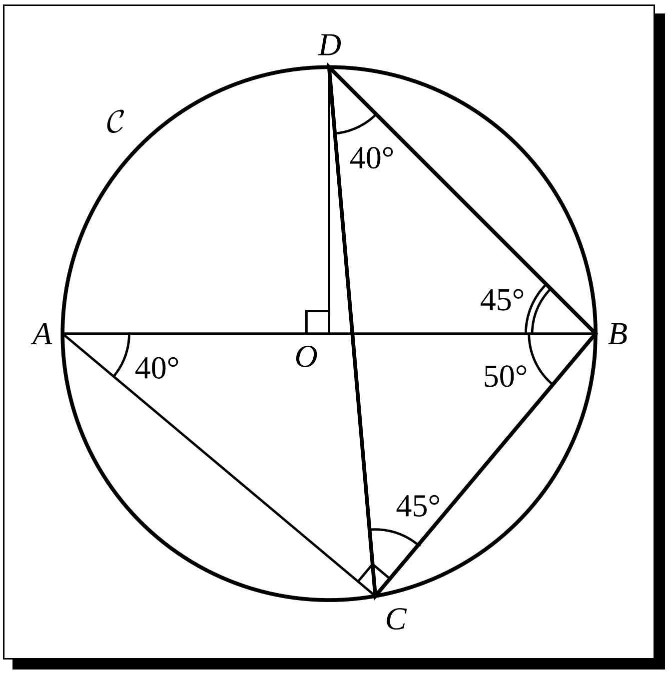
$$\begin{aligned}
\frac{AB}{\tan 40^\circ} = 12 + \frac{AB}{\tan 55^\circ} \quad &\Longleftrightarrow \quad \frac{AB}{\tan 40^\circ} - \frac{AB}{\tan 55^\circ} = 12 \\
&\Longleftrightarrow \quad AB\left(\frac{1}{\tan 40^\circ} - \frac{1}{\tan 55^\circ}\right) = 12 \\
&\Longleftrightarrow \quad AB\left(\frac{\tan 55^\circ - \tan 40^\circ}{\tan 40^\circ \times \tan 55^\circ}\right) = 12 \\
&\Longleftrightarrow \quad \boxed{AB = 12\left(\frac{\tan 40^\circ \times \tan 55^\circ}{\tan 55^\circ - \tan 40^\circ}\right)}
\end{aligned}$$

2. À la calculatrice, on trouve alors, à 10^{-2} près par défaut, $\boxed{AB \approx 24,41}$.

Exercice 5 : Cercles, triangles et angles

Les angles $\widehat{CAB}$ et $\widehat{CDB}$ sont deux angles inscrits interceptant le même arc, donc ils sont de même mesure et $\boxed{\widehat{CDB} = 40^\circ}$.
Le triangle ODB est un triangle rectangle par hypothèse, et il est isocèle puisque OD et OB sont des rayons du cercle $\mathcal{C}$. On a donc en particulier $\boxed{\widehat{OBD} = 45^\circ}$.
Le triangle ABC est rectangle en C puisque A, B et C sont des point du cercle $\mathcal{C}$ alors que $[AB]$est un diamètre de $\mathcal{C}$. La somme des angles étant de 180° dans un triangle, on en déduit que $\boxed{\widehat{ABC} = 50^\circ}$.

En raisonnant maintenant dans le triangle BDC, on trouve l'angle manquant : $\boxed{\widehat{DCB} = 180 - 135 = 45^\circ}$.



On peut alors conclure

$$\boxed{\widehat{CDB} = 40^\circ} \qquad \boxed{\widehat{DBC} = 95^\circ} \qquad \text{et} \qquad \boxed{\widehat{BCD} = 45^\circ}$$

Exercice 6 : Calcul de longueur

Les droites (AB) et (CD) étant parallèles, les triangles OAB et OCD sont en configuration de Thalès. On en déduit en particulier

$$\frac{OB}{OD} = \frac{OA}{AC} = \frac{3}{5}.$$

De la même façon, les droites (CB) et (ED) étant parallèles, les triangles OCB et OED sont en configuration de Thalès. On en déduit en particulier

$$\frac{OC}{OE} = \frac{OB}{OD} = \frac{3}{5} \qquad \text{d'où} \qquad OE = \frac{5}{3} \times OC \qquad \text{d'où} \qquad OE = \frac{25}{3}.$$

Finalement,

$$CE = OE - OC = \frac{25}{3} - 5 \qquad \text{soit} \qquad \boxed{CE = \frac{10}{3}}.$$
