NOM : 1 gm$_2$ 22 janvier 2004

Devoir surveillé n° 5

durée : 1h

Exercice 1 : (*5 points*) **Angle de vecteurs**

Dans le plan, rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, on considère les vecteurs

$$\vec{u}\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix} \qquad \vec{v}\begin{pmatrix}-2\\2\end{pmatrix}$$

a) Faire une figure.

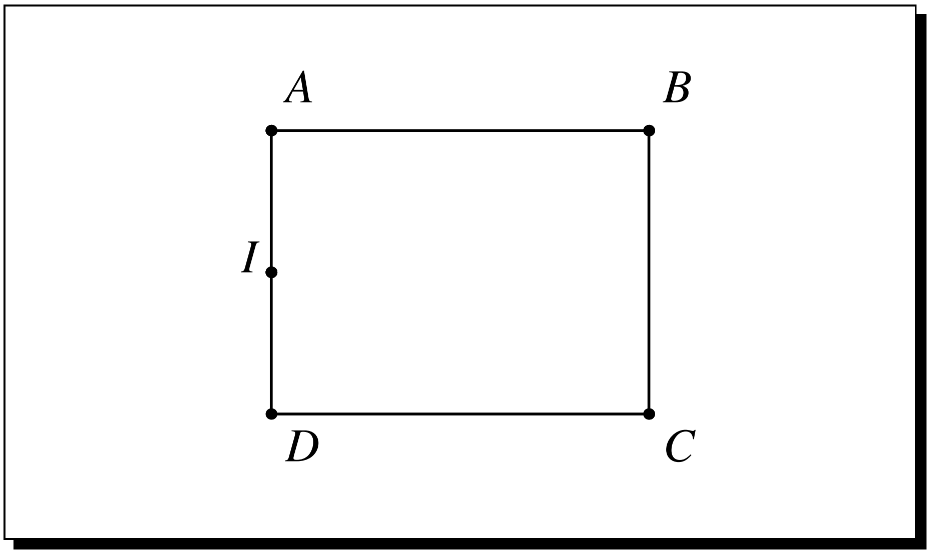
b) Calculer $\vec{u}\cdot\vec{v}$.

c) Calculer $\|\vec{u}\|$ et $\|\vec{v}\|$.

d) En déduire la valeur exacte de $\cos(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$, puis une valeur approchée, en radian ou en degré, et à 10^{-2} près, de chacune des deux valeurs possibles pour $(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$.

Exercice 2 : (*6 points*) **À partir d'un dessin**

On considère la figure ci-dessous dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$: $ABCD$ est un rectangle, $AB = 4$, $BC = 3$, et I est le milieu du segment $[AD]$.



Déterminer, en expliquant les calculs, les produits scalaires suivants :

a) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}$ b) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CB}$ c) $\overrightarrow{BI}\cdot\overrightarrow{AD}$ d) $\overrightarrow{IB}\cdot\overrightarrow{IC}$ e) $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{DB}$

Exercice 3 : (*1,5 points*) **Calcul de distance**

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$, on considère les points

$$A(-2; 1; -\sqrt{2}) \qquad \text{et} \qquad B(2; 6; \sqrt{2}).$$

Calculer la distance AB.

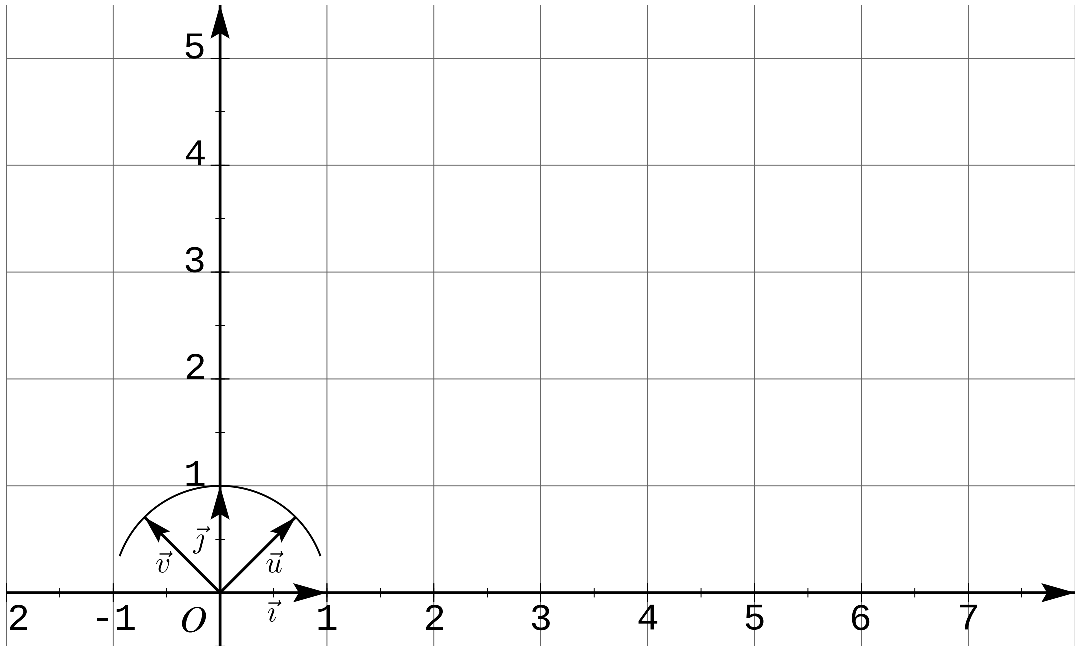
Exercice 4 : (*7,5 points*) **Changement de base**

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ d'unité 1 cm.

On considère les points $A(3, 3)$ et $B(7, 1)$ et les vecteurs

$$\vec{u}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \qquad \text{et} \qquad \vec{v}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

Le but de cet exercice est de déterminer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ dans la base $(O, \vec{u}, \vec{v})$.



1. Représenter les points A et B sur le graphique ci-dessus.
2. a) Calculer les deux nombres

$$a = \overrightarrow{AB} \cdot \vec{\imath} \qquad \text{et} \qquad b = \overrightarrow{AB} \cdot \vec{\jmath}$$

   b) Que dire du vecteur $a\vec{\imath} + b\vec{\jmath}$?
3. Vérifier que la famille $(\vec{u}, \vec{v})$ est une base orthonormale du plan. Autrement dit, vérifier que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont bien orthogonaux, et de norme 1.
4. a) Calculer les deux nombres

$$\alpha = \overrightarrow{AB} \cdot \vec{u} \qquad \text{et} \qquad \beta = \overrightarrow{AB} \cdot \vec{v}$$

   b) Déterminer les coordonnées du vecteur $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$. Remarque ?

   c) Tracer sur le dessin les vecteur $\alpha\vec{u}$ et $\beta\vec{v}$.