Corrigé du devoir surveillé n^o 9

Exercice 1 : Isolation phonique

1. On trouve $\boxed{u_1 = 90}$, $\boxed{u_2 = 81}$ et $\boxed{u_3 = 72,9}$
2. *a*) On a
$$u_{n+1} = u_n - \frac{10}{100}u_n \qquad \text{soit} \qquad \boxed{u_{n+1} = 0,9 \times u_n}$$
b) Le rapport entre 2 termes consécutifs est $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 0,9 =$ constante. On a donc une $\boxed{\text{suite géométrique}}$ de $\boxed{\text{raison } 0,9}$ et de $\boxed{\text{premier terme } u_0 = 100}$.
c) Le cours nous dit alors que l'on a $\boxed{u_n = u_0 \times (0,9)^n}$
3. Avec 10 plaques d'isolation phoniques, l'intensité sonore sera donc $\boxed{u_{10} = 100 \times (0,9)^{10} \approx 34,87}$
4. Soit n le nombre de plaques nécessaires à l'absorbtion de 90% de l'intensité initiale. On aura alors $u_n = 100 \times (0,9)^n \leqslant 10$, soit $(0,9)^n \leqslant 0,1$. Après essais à la calculatrice, on trouve qu'il faut avoir $\boxed{n \geqslant 22}$

Exercice 2 : Remboursement d'un emprunt

1. Utilisons la méthode naïve : on note u_n l'annuité numéro n. On a alors
$$u_1 = 1\,025, \quad u_2 = 1\,525, \quad u_3 = 2\,025, \quad u_4 = 2\,525, \quad u_5 = 3\,025, \quad u_6 = 3\,525,$$
et une simple addition nous donne le montant global payé après 6 annuités :
$$\boxed{u_1 + u_2 + \cdots + u_5 + u_6 = 13\,650}$$
2. Restons sur la méthode naïve : on note v_n l'annuité numéro n. On a alors, pour tout entier $n > 1$, $v_{n+1} = 1,15 \times v_n$. D'où
$$v_1 = 1\,530, \quad v_2 = 1\,759,5 \quad v_3 = 2\,023,425 \quad v_4 \approx 2\,326,938\,7 \quad v_5 \approx 3\,675,979\,6 \quad v_6 \approx 3\,077,376\,5$$
et une simple addition nous donne le montant global payé après 6 annuités :
$$\boxed{v_1 + v_2 + \cdots + v_5 + v_6 \approx 13\,393,219\,8}$$
Pour avoir le résultat exact, il faut passer par les formules : on sait que l'on a une suite géométrique de premier terme $v_1 = 1\,530\times$ et de raison $q = 1,15$. La somme des 6 premiers termes est donc
$$\boxed{S = 1\,530 \times \frac{1-(1,15)^6}{1-1,15} \approx 13\,393,22}$$
3. Et il est bien évident que c'est la $\boxed{\text{2ème formule}}$ qui est la plus avantageuse pour le client.

Exercice 3 : Étude d'une fonction rationnelle

$\boxed{\text{A}}$ Les points A et B sont sur la courbe C, donc leurs coordonnées respectives vérifient l'équation de la courbe C. On a donc le système de deux équations :
$$\begin{cases} 0 = a + \frac{b-2}{3} \\ \frac{3}{2} = a + \frac{4+b}{4+2} \end{cases} \Longrightarrow \begin{matrix}(1)\\(2)\end{matrix}\begin{cases} 0 = 3a + b - 2 \\ 9 = 6a + 4 + b \end{cases} \Longrightarrow \underset{(2)-(1)}{}\begin{cases} 0 = 3a + b - 2 \\ 9 = 3a + 6 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} b = -1 \\ a = 1 \end{cases}$$
d'où : la courbe C a pour équation $\boxed{y = 1 + \frac{x-1}{x^2+2}}$.

$\boxed{\text{B}}$ 1. *a*) Chercher le point d'intersection de C_f et Δ revient à résoudre le système
$$\begin{cases} y = f(x) \\ y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = \frac{x^2+2x+1}{x^2+2} \\ y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 2 = x^2 + 2x + 1 \\ y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = 2x \\ y = 1 \end{cases}$$
D'où l'unique point d'intersection $\boxed{I(1/2, 1)}$.

b) On a

$$f(x)-1=\frac{x^2+2x+1}{x^2+2}-\frac{x^2+2}{x^2+2}=\frac{2x-1}{x^2+2}$$

Ce quotient est du signe de $(2x-1)\times(x^2+2)$, mais comme x^2+2 est toujours positif, seul intervient le signe de $2x-1$, d'où le tableau récapitulatif suivant :

x	$-\infty$		$1/2$		$+\infty$
$2x-1$		$-$	0	$+$	
$f(x)-g(x)$		$-$	0	$+$	
positions relatives		C_f au dessous de Δ		C_f au dessus de Δ	

2. *a*) On obtient

x	-6	-4	-2	-1	0	1	2	4	6
$f(x)$	$0,66$	$0,5$	$0,17$	0	$0,5$	$1,33$	$1,5$	$1,39$	$1,29$

b) $\boxed{\text{Les résultats sont cohérents}}$ puisque l'on a bien $f(x)\leqslant 1$ pour $x<1/2$ et $f(x)\geqslant 1$ pour $x>1/2$.

3. On utilise la formule de dérivée d'un quotient

$$\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}.$$

Il vient alors

$$f'(x)=\frac{(2x+2)(x^2+2)-2x(x^2+2x+1)}{\left(x^2+2\right)^2}=\frac{-2x^2+2x+4}{\left(x^2+2\right)^2}$$

On a donc bien

$$\boxed{f'(x)=\frac{2\times\left(-x^2+x+2\right)}{\left(x^2+2\right)^2}}$$

4. Ce quotient est du signe du produit $2\times\left(-x^2+x+2\right)\times\left(x^2+2\right)^2$, mais comme 2 et $\left(x^2+2\right)^2$ sont strictement positifs, seul le signe de $-x^2+x+2$ intervient. On utilise alors la méthode du discriminant Δ, ici égal à 9, pour trouver les 2 racines

$$x_1=\frac{-1+3}{-2}=-1\qquad\text{et}\qquad x_2=\frac{-1-3}{-2}=2$$

et l'on sait que le polynôme $-x^2+x+2$ est du signe de $-a$ (donc ici positif) entre les racines x_1 et x_2. D'où le tableau de variation de f sur $[-6\,;6]$:

x	-6		-1		2		6
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$\approx 0,66$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$3/2$	$\searrow$	$\approx 1,29$

5. En utilisant la formule $y=f'(a)(x-a)+f(a)$ avec $a=0$, il vient $\boxed{T\ :y=x+\frac{1}{2}}$.

6.