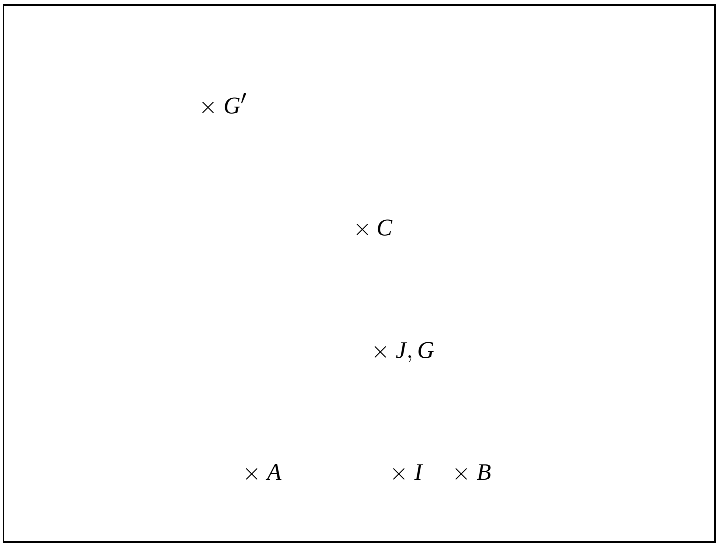
Corrigé du devoir surveillé n° 8

Exercice 1 : Géométrie vectorielle

1. Le barycentre du système $\{(A,2)(B,-2)\}$ n'existe pas (ou plutôt : il n'est pas défini) puisque la somme des poids est nulle.
2. On a
$$\overrightarrow{AI} + 2\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{O} \qquad \Rightarrow \qquad \overrightarrow{AI} + 2(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AI}) = \overrightarrow{O} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{\overrightarrow{AI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}}$$
3. Le point $\boxed{J \text{ est au milieu du segment } [IC]}$ puisque l'on a les mêmes poids en I et en C.
4. On a, par définition de G,
$$\overrightarrow{AG} + 2\overrightarrow{BG} + 3\overrightarrow{CG} = \overrightarrow{0} \qquad \Rightarrow \qquad \overrightarrow{AG} + 2\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AG}\right) + 3\left(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AG}\right) = \overrightarrow{0}$$
$$\Rightarrow \qquad 6\overrightarrow{AG} = 2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC} \qquad \text{soit} \qquad \boxed{\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}}$$
On peut tout de même remarquer que G est également le barycentre du système $\{(I,3),(C,3)\}$ (associativité du barycentre), autrement dit que $\boxed{\text{les points } J \text{ et } G \text{ sont confondus}}$.
5. De la même façon, on a
$$\overrightarrow{AG'} - 2\overrightarrow{BG'} + 3\overrightarrow{CG'} = \overrightarrow{0} \qquad \Rightarrow \qquad \overrightarrow{AG'} - 2\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AG'}\right) + 3\left(\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AG'}\right) = \overrightarrow{0}$$
$$\Rightarrow \qquad 2\overrightarrow{AG'} = \overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} + 3\overrightarrow{BC} \qquad \text{soit} \qquad \boxed{\overrightarrow{AG'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC}}$$

On a finalement le dessin suivant :



Exercice 2 : Une fonction rationnelle

1. On remarque tout d'abord que $f(x)$ existe si et seulement si $\boxed{x \neq -1}$. Le calcul de la fonction dérivée donne alors
$$f'(x) = \frac{-2}{(x+1)^\dagger} + 1 = \frac{-2 + x^2 + 2x + 1}{(x+1)^2} = \boxed{\frac{x^2 + x - 1}{(x+1)^2} = f'(x)}$$
du signe de $x^2 + x - 1$ puisque $(x+1)^2$ est toujours strictement positif si $x \neq -1$. Comme $\Delta = 8 = (2\sqrt{2})^2$ est strictement positif, on trouve deux racines réelles $x_1 = -1 - \sqrt{2} \simeq -2,41$ et $x_2 = -1 + \sqrt{2} \simeq 0,41$, et $x^2 + x - 1$ est négatif (signe de $-a$) entre x_1 et x_2, ce qui donne le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		x_1		-1		x_2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
$f(x)$		↗	$\simeq -5,83$	↘	$\|\|$	↘	$\simeq -0,17$	↗	

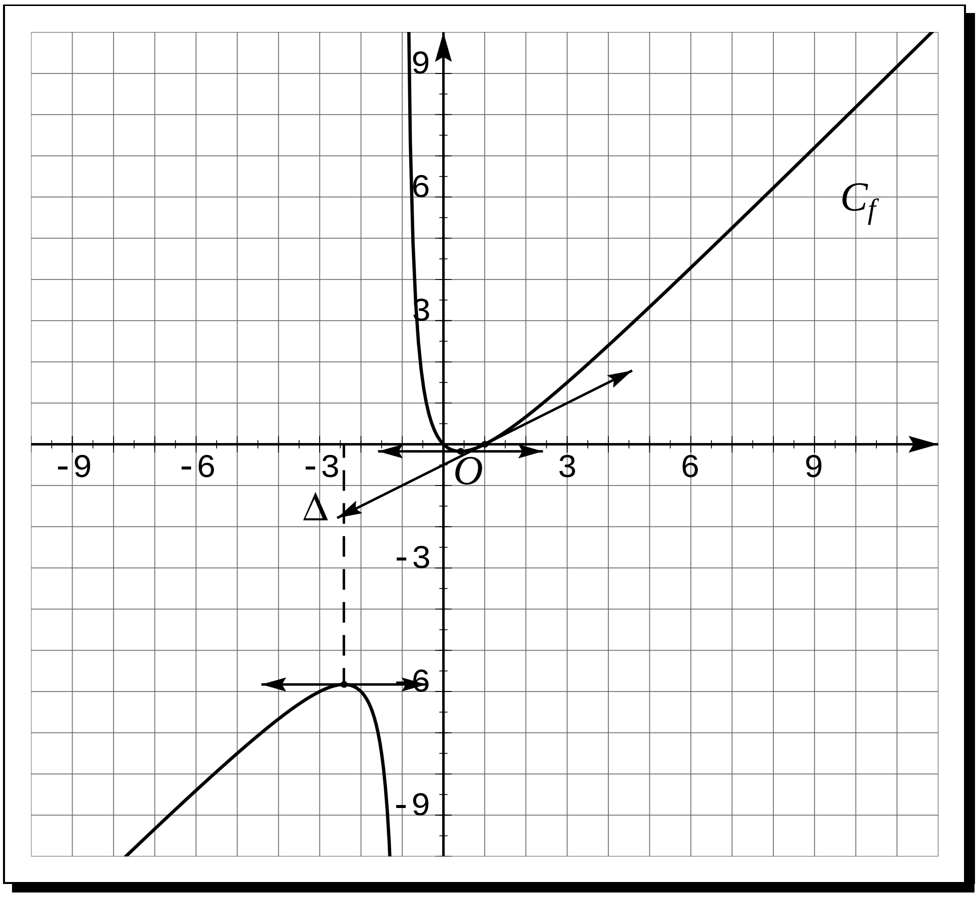
où $f(x_1) = -2\sqrt{2} - 3$ et $f(x_2) = 2\sqrt{2} - 3$.

2. Comme $f(1) = 0$ et que $f'(1) = 1/2$, on trouve pour équation de Δ : $\boxed{y = \frac{1}{2}(x-1)}$.

3.

x	$-\frac{9}{10}$	$-\frac{4}{5}$	$-\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{2}$	0	1	2	3	4	9	15
$f(x)$	$17,1$	$5,25$	$7,2$	$1,5$	0	0	$2/3$	$3/2$	$2,5$	$7,2$	$13,125$

4.



Exercice 3 : Les poids sont à déterminer

Si G est le barycentre du système $\{(A, \alpha), (B, \beta)\}$, alors

$$\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} = \vec{0}.$$

En partant de la relation donnée dans le texte, il vient alors :

$$2\overrightarrow{GB} - 3\overrightarrow{AB} = \vec{0} \iff 2\overrightarrow{GB} - 3\overrightarrow{AG} - 3\overrightarrow{GB} = \vec{0} \iff 3\overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GB} = \vec{0}$$

Par identification, on trouve alors $\boxed{(\alpha, \beta) = (3, -1)}$.
