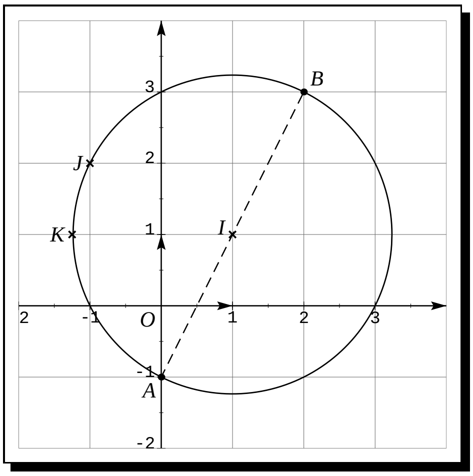
Corrigé du devoir surveillé nº 6

Exercice 1 : Équations de cercles en géométrie analytique

b) On trouve facilement :

$$\boxed{\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}}, \qquad \boxed{\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}},$$

$$\boxed{\overrightarrow{AB} \cdot \vec{\imath} = 2}, \qquad \boxed{\overrightarrow{AB} \cdot \vec{\jmath} = 4}$$



c) Le cercle cherché a pour centre le milieu I de $[AB]$, et son rayon est $\frac{1}{2}\|\overrightarrow{AB}\|$. Comme $I = (\frac{1}{2}(x_A + x_B), \frac{1}{2}(y_A + y_B))$. On a donc pour centre $\boxed{I(1, 1)}$ et pour rayon $\boxed{r = \sqrt{5}}$. De plus il vient, pour équation de $\mathcal{C}$:

$$\boxed{\mathcal{C} : \quad (x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 5}$$

ce qui donne bien, après développement, l'équation proposée.

e) Le point $\boxed{J \text{ est sur le cercle}}$ car ses coordonnées vérifient l'équation proposée. En revanche, les coordonnées de K ne vérifient pas cette équation, on en déduit que $\boxed{K \text{ n'est pas sur } \mathcal{C}}$.

f) • *Intersection de $\mathcal{C}$ avec l'axe Oy* : il suffit de résoudre le système

$$\begin{cases} x = 0 \\ x^2 - 2x + y^2 - 2y - 3 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \\ y^2 - 2y - 3 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \\ y = 3 \quad \text{ou} \quad y = -1 \end{cases}$$

La dernière équivalence provenant du fait que l'équation $y^2 - 2y - 3 = 0$ admet deux solutions y_1 et y_2 puisque le discriminant Δ est positif (on trouve $\Delta = 16 = 4^2$).

Il n'a donc deux points d'intersection avec l'axe Oy : $\boxed{\text{les point } (0, -1) \text{ et } (0, 3)}$.

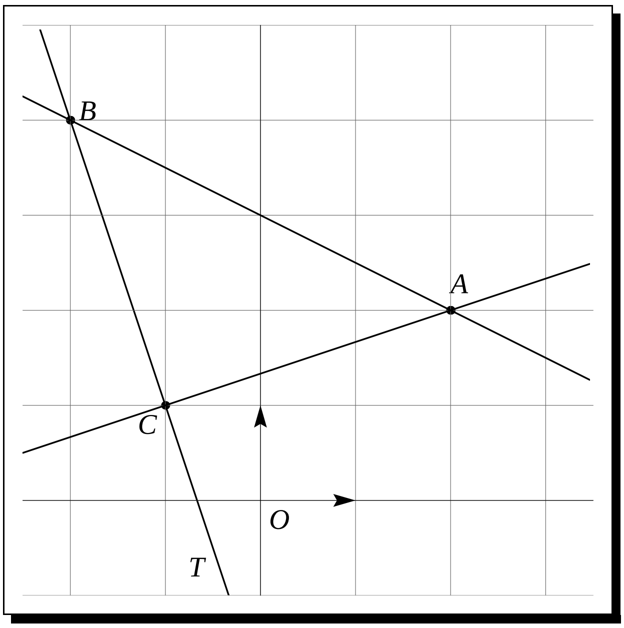
• *Intersection de $\mathcal{C}$ avec l'axe Ox* : il suffit de résoudre le système

$$\begin{cases} y = 0 \\ x^2 - 2x + y^2 - 2y - 3 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = 0 \\ x^2 - 2x - 3 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = 0 \\ x = 3 \quad \text{ou} \quad x = -1 \end{cases}$$

Il n'a donc deux points d'intersection avec l'axe Ox : $\boxed{\text{les points } (-1, 0) \text{ et } (3, 0)}$.

Exercice 2 : Géométrie analytique

1.



2. Le point C a pour coordonnée $C(-1,1)$, et ses coordonnées vérifient l'équation de la droite $T\ : y = -3x - 2$. Donc $\boxed{C \text{ est sur la droite } T}$.

3. On trouve

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} \quad \text{soit} \quad \boxed{\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix}} \quad \text{et} \quad \boxed{\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix}}$$

Ici, comme $AB = \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(-4)^2 + 2^2}$, il vient

$$\boxed{AB = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}} \qquad \text{et} \qquad \boxed{AC = \sqrt{10}}$$

4. *a*) L'équation de la droite (AC) est de la forme $y = ax + b$ où a et b sont deux constantes réelles à déterminer. Des deux conditions « la droite passe par $A(2,2)$ » et « la droite passe par C », on tire le système :

$$\begin{array}{l} (1) \\ (2) \end{array} \begin{cases} 2 = 2a + b \\ 1 = -a + b \end{cases} \implies \begin{array}{l} (1)-(2) \\ (2) \end{array} \begin{cases} 1 = 3a \\ 1 = -a + b \end{cases} \quad \text{d'où} \quad \boxed{(a,b) = \left(\frac{1}{3}, \frac{4}{3}\right)}$$

L'équation réduite de la droite (AC) est donc $\boxed{(AC)\ : y = \frac{1}{3}(x+4)}$.

b) Le vecteur $\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$, donc $\boxed{\text{le coefficient directeur de } (BC) \text{ est } \frac{-3}{1} = -3}$.

5. On a $BC = \|\overrightarrow{BC}\| = \sqrt{10}$. Le triangle ABC est donc $\boxed{\text{isocèle}}$ (puisque $AC = BC$), et $\boxed{\text{rectangle en } C}$ (par Pythagore puisque $AB^2 = AC^2 + BC^2$).

Exercice 3 : Tangentes à un cercle, de direction donnée

1. Pour construire le cercle demandé, il nous faut son centre et son rayon. Désignons respectivement par $I(a,b)$ et r le centre et le rayon cherché. Le cercle a alors pour équation

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2 \qquad \text{soit} \qquad x^2 - 2ax + y^2 - 2by + a^2 + b^2 - r^2 = 0.$$

En identifiant avec l'équation fournie, on voit que l'on doit avoir

$$\begin{cases} -2a = -6 \\ -2b = -2 \\ a^2 + b^2 - r^2 = -15 \end{cases} \quad \text{d'où} \quad (a,b) = (3,1) \quad \text{d'où} \quad \boxed{I(3;1)} \quad \text{et} \quad \boxed{r = \sqrt{25} = 5}$$

2. On sait qu'en un point donné du cercle, la tagente est perpendiculaire au rayon. Il suffit donc de construire la perpendiculaire à Δ passant par le centre du cercle pour trouver les points de tangence cherchés.