Corrigé du devoir surveillé n° 5

Exercice 1 : Angle de vecteurs

b) On a

$$\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}-2\\2\end{pmatrix} = 1 \times (-2) + 3 \times 2 \qquad \text{soit} \qquad \boxed{\vec{u} \cdot \vec{v} = 4}$$

c) On a $\|\vec{u}\| = \sqrt{1^2 + 3^2}$, soit $\boxed{\|\vec{u}\| = \sqrt{10}}$ et $\|\vec{v}\| = \sqrt{(-2)^2 + 2^2}$, soit $\boxed{\|\vec{v}\| = 2\sqrt{2}}$.

d) Comme $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{u}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v})$, il vient

$$\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \times \|\vec{u}\|} = \frac{4}{\sqrt{10} \times 2\sqrt{2}} = \boxed{\frac{1}{\sqrt{5}}}$$

Et on sait que l'on a, à $2k\pi$ près, $(\vec{u}, \vec{v}) = \pm \operatorname{Arccos}(1/\sqrt{5})$. À la calculatrice, on trouve que cet angle fait à peu près $\boxed{(\vec{u}, \vec{v}) \approx \pm 1,11 \text{ rd}}$ (soit environ $\pm 1,11 \times \frac{180}{\pi} \approx \pm 63,6$ degrés).

Exercice 2 : À partir d'un dessin

a) Comme $\overrightarrow{CD} = -\overrightarrow{AB}$, on a

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = -\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{AB}^2 = \boxed{-16}$$

b) Comme les vecteur $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CB}$ sont orthogonaux, on a

$$\boxed{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CB} = 0}$$

c) Comme $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$, on a

$$\overrightarrow{BI} \cdot \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BI} \cdot \overrightarrow{BC} = \overline{BI'} \times \overline{BC}$$

où I' est le projeté orthogonal du point I sur la droite (BC). Le point I' est évidemment le milieu du segment $[BC]$. D'où

$$\overrightarrow{BI} \cdot \overrightarrow{AD} = 3 \times \frac{3}{2} \qquad \text{soit} \qquad \boxed{\overrightarrow{BI} \cdot \overrightarrow{AD} = \frac{9}{2}}$$

d) Pour cette question, il est difficile d'utiliser le théorème de projection. On va donc décomposer. Deux solutions possibles :

- $$\begin{aligned}\overrightarrow{IB} \cdot \overrightarrow{IC} &= \overrightarrow{IB} \cdot \left(\overrightarrow{ID} + \overrightarrow{DC}\right)\\ &= \overrightarrow{IB} \cdot \overrightarrow{ID} + \overrightarrow{IB} \cdot \overrightarrow{DC}\\ &= \overline{IA} \times \overline{ID} + \overline{DC} \times \overline{DC} = -\frac{3}{2} \times \frac{3}{2} + 16 = \boxed{\frac{55}{4}}\end{aligned}$$
- $$\begin{aligned}\overrightarrow{IB} \cdot \overrightarrow{IC} &= (\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AB}) \cdot (\overrightarrow{ID} + \overrightarrow{DC})\\ &= \underbrace{\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{ID}}_{-IA^2} + \underbrace{\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{DC}}_{0} + \underbrace{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{ID}}_{0} + \underbrace{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DC}}_{AB^2}\\ &= -\frac{9}{4} + 16 = \boxed{\frac{55}{4}}\end{aligned}$$

e) Là encore, il faut utiliser la décomposition. Deux exemples de décompositions possibles :

- $$\begin{aligned}\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{DB} &= \overrightarrow{CA} \cdot \left(\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CB}\right)\\ &= \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}\\ &= \overline{CD} \times \overline{DC} + \overline{CB} \times \overline{CB} = -16 + 9 = \boxed{-7}\end{aligned}$$
- $$\begin{aligned}\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{DB} &= (\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA}) \cdot (\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CB})\\ &= \underbrace{\overrightarrow{CD}.\overrightarrow{DC}}_{-DC^2} + \underbrace{\overrightarrow{CD}.\overrightarrow{CB}}_{0} + \underbrace{\overrightarrow{DA}.\overrightarrow{DC}}_{0} + \underbrace{\overrightarrow{DA}.\overrightarrow{CB}}_{DA^2}\\ &= -16 + 9 = \boxed{-7}\end{aligned}$$

Exercice 3 : Calcul de distance

Calculons tout d'abord les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$. Il vient

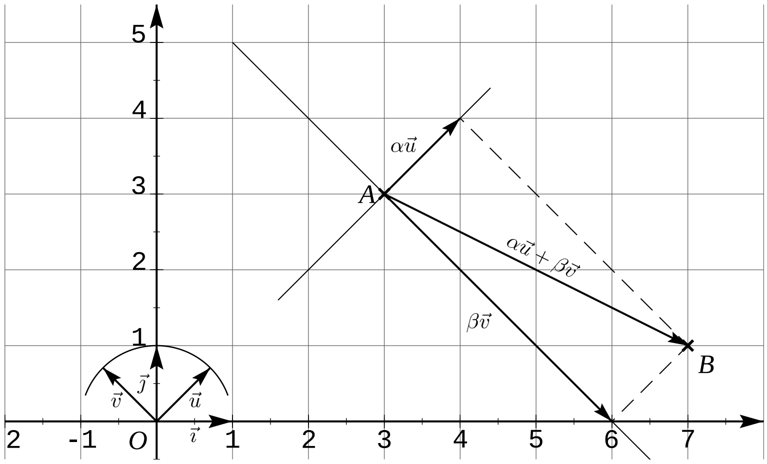
$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2-(-2) \\ 6-1 \\ \sqrt{2}-(-\sqrt{2}) \end{pmatrix} \qquad \text{soit} \qquad \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 2\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

La distance AB est égale à la norme du vecteur $\overrightarrow{AB}$, d'où

$$AB = \sqrt{4^2+5^2+(2\sqrt{2})^2} = \sqrt{16+25+8} = \sqrt{49} \qquad \text{soit} \qquad \boxed{AB = 7}.$$

Exercice 4 : Changement de base

1.



2. *a*) On a

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 7-3 \\ 1-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}, \qquad \vec\imath\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \vec\jmath\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

d'où

$$a = \overrightarrow{AB}\cdot\vec\imath = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{soit} \quad \boxed{a = 4} \qquad \text{et} \qquad b = \overrightarrow{AB}\cdot\vec\jmath = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{soit} \quad \boxed{b = -2}$$

b) On a donc

$$a\vec\imath + b\jmath = 4\vec\imath - 2\vec\jmath = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad \text{soit} \qquad \boxed{a\vec\imath + b\vec\jmath = \overrightarrow{AB}}$$

3. On a

$$\|\vec u\| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{2}{4}+\frac{2}{4}} = \sqrt{1} \qquad \text{soit} \qquad \boxed{\|\vec u\| = 1}$$

De façon analogue, on trouve bien $\boxed{\|\vec v\| = 1}$. De plus,

$$\vec u\cdot\vec v = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \end{pmatrix} = -\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \qquad \text{donc} \qquad \boxed{\vec u \text{ et } \vec v \text{ sont orthogonaux}}$$

Les vecteurs $\vec u$ et $\vec v$ sont orthogonaux et de norme 1, on a donc bien une base orthonormale du plan.

4. *a*) Il vient

$$\alpha = \overrightarrow{AB}\cdot\vec u = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \end{pmatrix} = \frac{4\sqrt{2}}{2} - \frac{2\sqrt{2}}{2} \qquad \text{soit} \qquad \boxed{\alpha = \sqrt{2}}$$

et, de la même façon,

$$\beta = \overrightarrow{AB}\cdot\vec v = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \end{pmatrix} = -\frac{4\sqrt{2}}{2} - \frac{2\sqrt{2}}{2} \qquad \text{soit} \qquad \boxed{\beta = -3\sqrt{2}}$$

b) Il vient alors

$$\alpha\vec u = \sqrt{2}\begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \alpha\vec u} \qquad \text{et} \qquad \beta\vec v = -3\sqrt{2}\begin{pmatrix} -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6/2 \\ 6/2 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix} = \beta\vec v}$$

$$\text{d'où} \qquad \boxed{\alpha\vec u + \beta\vec v = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} = \overrightarrow{AB}}$$
