Corrigé du devoir surveillé n^o 4

Exercice 1 : Études de fonctions polynômes, résolution approchée d'équation

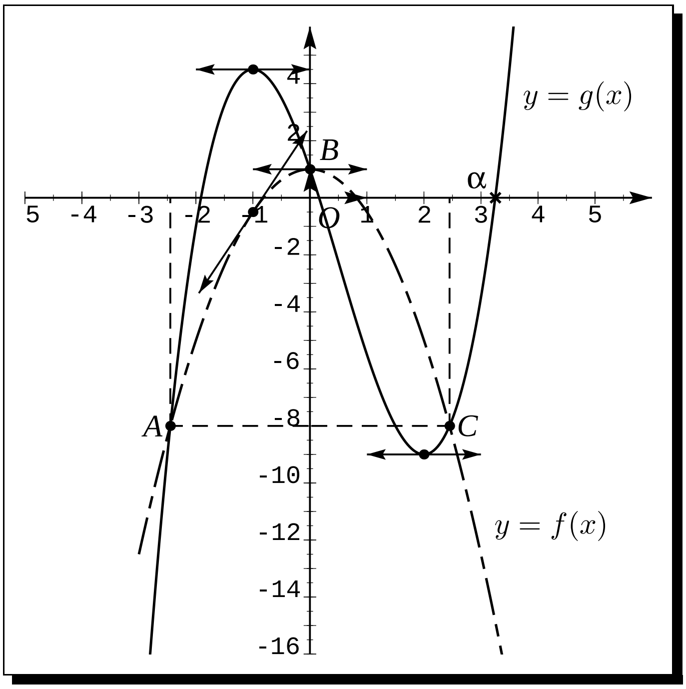
A **1.** Il vient $\boxed{f'(x) = -3x}$, du signe de $-x$, d'où le tableau de variations :

x	-3		0		4
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-12,5$	$\nearrow$	1	$\searrow$	-23

2. On a $f(-1) = -1/2$ et $f'(-1) = 3$. L'utilisation de la formule $y = f'(a)(x-a) + f(a)$ donne alors

$$y = 3(x+1) - \frac{1}{2} \qquad \text{d' où l'équation cherchée :} \qquad \boxed{T \ : \quad y = 3x + \frac{5}{2}}$$

3.



B **1.** *a*) *b*) Le calcul de la fonction dérivée donne $\boxed{g'(x) = 3x^2 - 3x - 6}$, qui est bien $\boxed{\text{du signe de } x^2 - x - 2}$ puisque $g'(x) = 3(x^2 - x - 2)$ avec 3 positif.

c) La méthode du discriminant Δ, ici égal à 9, nous donne les deux racines $x_1 = 2$ et $x_2 = -1$. Or l'on sait qu'un polynôme du second degré est « *du signe de* $-a$ *entre les racines* ». D'où : $\boxed{g' \text{ négatif entre } -1 \text{ et } 2\text{, positif sinon}}$. D'où le tableau de variations de g :

x	-3		-1		2		4
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$-21,5$	$\nearrow$	$9/2$	$\searrow$	-9	$\nearrow$	17

d) La fonction g est strictement croissante sur l'intervalle $[-3, 1]$ (d'après le tableau de variations) et elle change de signe sur cet intervalle (puisque $g(-3) = -21,5 < 0$ et $g(-1) = 4,5 > 0$). Donc l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution sur l'intervalle $[-3, -1]$.

On tient des raisonnements analogues pour montrer que cette équation admet également une unique solution sur l'intervalle $[-1, 2]$ ainsi qu'une unique solution sur l'intervalle $[2, 4]$. Finalement, l'équation $g(x) = 0$ admet

$$\boxed{3 \text{ solutions sur l'intervalle } [-3, 4]}.$$

e) On a $\boxed{3,25 < \alpha < 3,26}$ puisque $g(3,25) \approx -0,016$ est négatif, alors que $g(3,26) \approx 0,145$ est positif.

f) Pour déterminer l'intersection des deux courbes, il faut résoudre le système

$$\begin{cases} y = g(x) \\ y = f(x) \end{cases} \iff \begin{cases} y = x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 6x + 1 \\ y = -\frac{3}{2}x^2 + 1 \end{cases} \iff \begin{cases} -\frac{3}{2}x^2 + 1 = x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 6x + 1 \\ y = -\frac{3}{2}x^2 + 1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 0 = x^3 - 6x \\ y = -\frac{3}{2}x^2 + 1 \end{cases} \iff \begin{cases} 0 = x(x - \sqrt{6})(x + \sqrt{6}) \\ y = -\frac{3}{2}x^2 + 1 \end{cases}$$

d'où les trois points d'intersection : $\boxed{A(-\sqrt{6}, -8)}$, $\boxed{B(0, 1)}$ et $\boxed{C(\sqrt{6}, -8)}$.

Exercice 2 : Complexes et géométrie

1. *a*) Par définition, on a

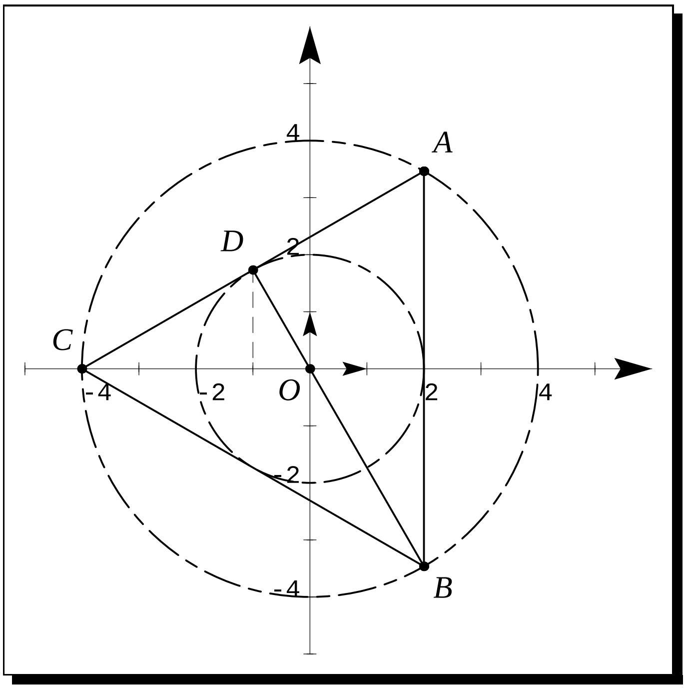
$$a = 4\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) = 4\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \qquad \text{soit} \qquad \boxed{a = 2 + 2i\sqrt{3}}$$

b) Le module de z_B est $|z_B| = \sqrt{2^2 + (-2\sqrt{3})^2} = \sqrt{4 + 12}$, soit $\boxed{|z_B| = 4}$. Son argument θ_B vérifie les relations

$$\begin{cases} \cos\theta_B = \frac{2}{4} \\ \sin\theta_B = -\frac{2\sqrt{3}}{4} \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} \cos\theta_B = \frac{1}{2} \\ \sin\theta_B = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \quad \text{d'où l'on tire} \quad \boxed{\theta_B = -\frac{\pi}{3}} \quad \text{à } 2k\pi \text{ près}$$

On a donc finalement $\boxed{z_B = \left[4, -\frac{\pi}{3}\right]}$

c)



2. *a*) De la même manière que précedemment, on trouve $\boxed{|z_C| = 4}$ et $\cos\theta_C = -1$ avec $\sin\theta_C = 0$. On en déduit que $\boxed{\theta_C = \pi}$ convient.

Pour z_D, on trouve $\boxed{|z_D| = 2}$ d'où $\cos\theta_D = -1/2$ et $\sin\theta_D = \frac{\sqrt{3}}{2}$. On en déduit que $\boxed{\theta_D = 2\pi/3}$ à $2k\pi$ près. Finalement, on a

$$\boxed{z_C = [4, \pi]} \qquad \text{et} \qquad \boxed{z_D = \left[2, \frac{2\pi}{3}\right]}$$

3. *a*) On a $|z_A| = |z_B| = |z_C| = 4$, donc on a l'égalité de distances $OA = OB = OC = 4$. En d'autres termes, les points A, B et C sont tous sur le $\boxed{\text{même cercle de centre } O \text{ et de rayon } 4}$.

b) Le milieu du segment $[AC]$ a pour affixe

$$\frac{1}{2}(z_A + z_C) = \frac{1}{2}(2 + 2i\sqrt{3} - 4) = -1 + i\sqrt{3} = z_D$$

Donc $\boxed{D \text{ est bien le milieu de } [AC]}$.

c) On calcule les différentes distances concernées, puis on applique le théorème de Pythagore :

$$AB = |z_B - z_A| = |(2 - 2i\sqrt{3}) - (2 + 2i\sqrt{3})| = |-4i\sqrt{3}| = \sqrt{48} \qquad \text{soit} \qquad \boxed{AB = 4\sqrt{3}}$$
$$AD = |z_D - z_A| = |(-1 + i\sqrt{3}) - (2 + 2i\sqrt{3})| = |-3 - i\sqrt{3}| = \sqrt{12} \qquad \text{soit} \qquad \boxed{AD = 2\sqrt{3}}$$
$$BD = |z_D - z_B| = |(-1 + i\sqrt{3}) - (2 - 2i\sqrt{3})| = |-3 + 3i\sqrt{3}| = \sqrt{36} \qquad \text{soit} \qquad \boxed{BD = 6}$$

On a bien $AB^2 = AD^2 + BD^2$ donc $\boxed{BDA \text{ rectangle en } D}$.

d) Il suffit de calculer les deux distances encore inconnues :

$$AC = |z_C - z_A| = |-4 - (2 + 2i\sqrt{3})| = |-6 - 2i\sqrt{3}| = \sqrt{48} \qquad \text{soit} \qquad \boxed{AC = 4\sqrt{3}}$$
$$BC = |z_C - z_B| = |-4 - (2 - 2i\sqrt{3})| = |-6 + 2i\sqrt{3}| = \sqrt{48} \qquad \text{soit} \qquad \boxed{BC = 4\sqrt{3}}$$

Finalement, on a $AC = BC = AB$ donc $\boxed{ABC \text{ est équilatéral}}$.