Corrigé du devoir surveillé n° 2

Exercice : Complexes et géométrie

1. *a*) Il vient

$$|z_A| = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + 2^2} = 4 \qquad \text{et} \qquad \begin{cases} \cos\theta_A = 2\sqrt{3}/4 = \sqrt{3}/2 \\ \sin\theta_A = 1/2 \end{cases} \implies \theta_A = \frac{5\pi}{6} \quad \text{convient}$$

d'où $\boxed{z_A = \left[4; \frac{5\pi}{6}\right]}$

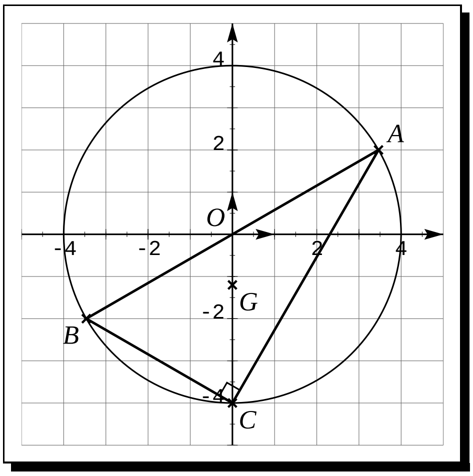
b) Il vient

$$z_B = 4\left(\cos\frac{-5\pi}{6} + i\sin\frac{-5\pi}{6}\right) = 4\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right) \qquad \text{soit} \qquad \boxed{z_B = -2\sqrt{3} - 2i}$$

c) Il vient

$$|z_C| = \sqrt{(-4)^2} = 4 \qquad \text{et} \qquad \begin{cases} \cos\theta_C = 0 \\ \sin\theta_C = -1 \end{cases} \implies \theta_C = -\frac{\pi}{2} \quad \text{convient} \qquad \text{et} \qquad \boxed{z_C = \left[4; -\frac{\pi}{2}\right]}$$

2.



3. On sait, d'après les questions précédentes, que

$$|z_A| = 4, \qquad |z_B| = 4, \qquad \text{et} \qquad |z_C| = 4, \qquad \text{autrement dit,} \qquad OA = OB = OC = 4$$

ce qui prouve que les points A, B et C sont $\boxed{\text{sur un même cercle de centre } O \text{ et de rayon } 4}$.

4. *a*) Il vient

$$\begin{aligned} AB &= |z_B - z_A| \\ &= \left|-2\sqrt{3} - 2i - \left(2\sqrt{3} + 2i\right)\right| \\ &= \left|-4\sqrt{3} - 4i\right| \\ &= \sqrt{(-4\sqrt{3})^2 + (-4)^2} \qquad \text{soit} \qquad \boxed{AB = 8}. \end{aligned}$$

b) Les points A, B et C sont tous sur le même cercle de centre O et de rayon 4 d'après la question **3.**, et $AB = 8$ d'après la question précédente. On en déduit que $[AB]$ est un diamètre du cercle, ce qui prouve que $\boxed{ABC \text{ est un triangle rectangle en } C}$.

5. Si G est le centre de gravité du triangle ABC, il vérifie l'égalité

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OC}$$

puisque O est le milieu de $[AB]$ (car centre du cercle dont $[AB]$ est un diamètre). De cette égalité vectorielle, on tire l'égalité d'affixes :

$$z_G = \frac{1}{3}z_C = \frac{1}{3} \times (-4i) \qquad \text{soit} \qquad \boxed{z_G = -\frac{4}{3}i}.$$