Devoir surveillé n° 1

Exercice 1 : Un polynôme de degré 3

1. On trouve $\boxed{P(-1) = 0}$.

2. Donc P se factorise sous la forme

$$P(x) = (x+1)(ax^2 + bx + c)$$

où a, b et c sont des constantes réelles à déterminer.

En développant puis en réduisant l'expression ci-dessus, et en l'identifiant avec l'expression de départ, il vient

$$P(x) = ax^3 + (b+a)x^2 + (c+b)x + c = 6x^3 + 5x^2 - 2x - 1$$

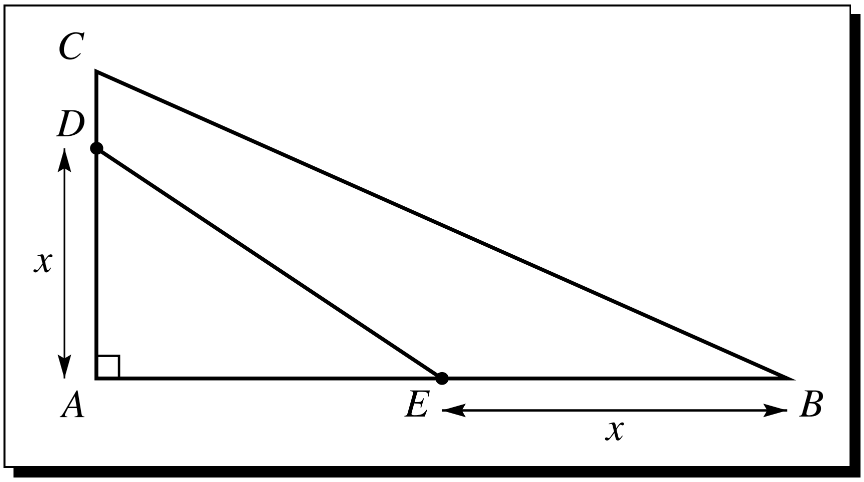
d'où l'on tire le système

$$\begin{cases} a = 6 \\ b + a = 5 \\ c + b = -2 \\ c = -1 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 6 \\ b = -1 \\ c = -1 \end{cases}$$

puis la factorisation de p : $\boxed{P(x) = (x+1)(6x^2 - x - 1)}$.

3. On a donc $P(x)$ sous la forme d'un produit de facteurs. Celui-ci est donc nul si et seulement si l'un des facteurs est nul. Le facteur $(x+1)$ donne la solution $\boxed{x = -1}$ (déjà trouvée à la question **1.**), et le facteur $(6x^2 - x - 1)$ donne $\boxed{\text{deux autres solutions : } x = -1/3 \text{ et } x = 1/2}$ (trouvées avec la méthode du discriminant Δ, ici égal à 25).

Exercice 2 : Triangles rectangles...



L'aire du triangle ABC est $\frac{1}{2}(AB \times AC) = \frac{1}{2}(18 \times 8)$, soit $\boxed{\mathcal{A}_{ABC} = 72}$.

L'aire du triangle ADE est $\frac{1}{2}(AD \times AE) = \frac{1}{2}(x \times (18 - x))$, soit $\boxed{\mathcal{A}_{ADE} = -\frac{1}{2}x^2 + 9x}$.

Répondre au problème posé revient donc à résoudre l'équation

$$\boxed{-\frac{1}{2}x^2 + 9x = 36} \iff -\frac{1}{2}x^2 + 9x - 36 = 0.$$

On a donc une équation polynomiale du type $ax^2 + bx + c = 0$ avec

$$a = -\frac{1}{2}, \qquad b = 9, \qquad c = -36.$$

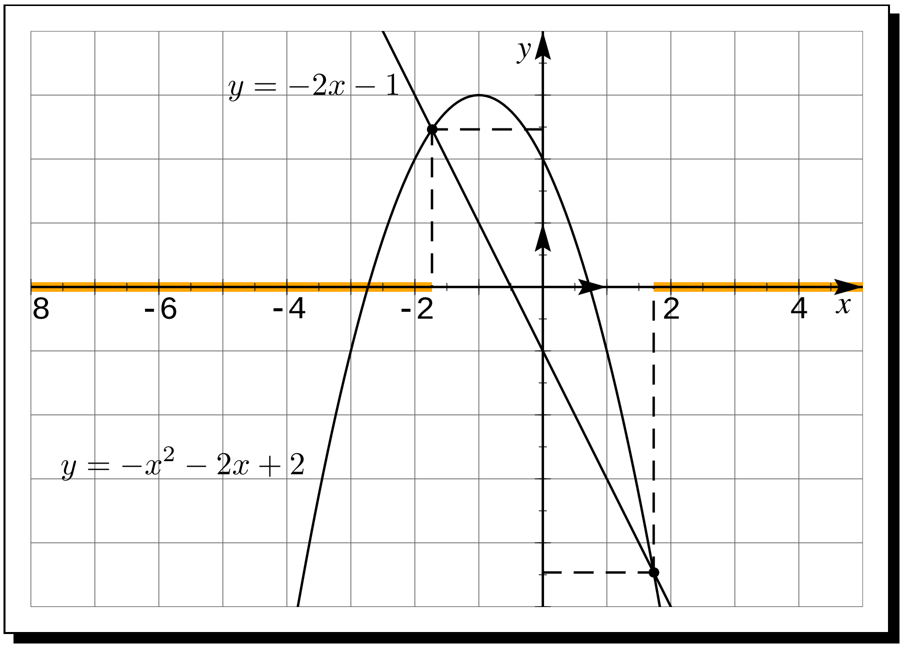
Le calcul du discriminant Δ donne $\boxed{\Delta = 9}$ d'où l'on déduit que l'équation admet 2 solutions : $x = 6$ et $x = 12$. Or on sait que $x \leqslant AC = 8$, donc la solution $x = 12$ est impossible.

Finalement, le problème posé admet $\boxed{\text{une seule solution : } x = 6}$.

Exercice 3 : Résolutions d'équations et d'inéquations polynomiales

1. *a*) Graphiquement, les solutions de l'équation $-x^2 - 2x + 2 = 0$ correspondent aux abscisses des points d'intersection de la courbe $y = -x^2 - 2x + 2$ avec l'axe des abscisses $y = 0$. On lit donc $\boxed{2 \text{ solutions : } x_1 \approx -2,6 \text{ et } x_2 \approx 0,7}$.

b)



c) Graphiquement, les solutions de l'inéquation $-x^2 - 2x + 2 \leqslant -2x - 1$ correspondent aux abscisses des points de la parabole qui sont situés en-dessous des points de la droite $y = -2x-1$. Il y a donc deux intervalles solutions et $\boxed{S =]-\infty; -1,7] \cup [1,7; +\infty[}$

2. *a*) On résoud l'équation $-x^2 - 2x + 2 = 0$ en utilisant la méthode du discriminant. On trouve $\Delta = 12$ d'où les deux racines réelles

$$x_1 = \frac{2-\sqrt{12}}{2} = \frac{2-2\sqrt{3}}{2} \quad \text{soit} \quad \boxed{x_1 = 1-\sqrt{3}} \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{2-\sqrt{12}}{2} = \boxed{1+\sqrt{3} = x_2}$$

b) Il vient

$$-x^2 - 2x + 2 \leqslant -2x - 1 \quad \Longleftrightarrow \quad -x^2 + 3 \leqslant 0.$$

Et résoudre cette dernière inéquation revient à déterminer le signe du polynôme $3 - x^2$. Si on ne s'aperçoit pas de l'identité remarquable $3 - x^2 = (\sqrt{3} - x)(\sqrt{3} + x)$, on peut encore utiliser la méthode du discriminant. On trouve alors $\Delta = 12$, d'où les 2 racines réelles $\sqrt{3}$ et $-\sqrt{3}$. Le cours nous dit alors que le polynôme est du signe de $-a$ à l'intérieur de l'intervalle des racines, et du signe de a à l'extérieur de cet intervalle. Comme ici a est négatif (puisque $a = -1$), on en déduit que

$$-x^2 + 3 \leqslant 0. \quad \Longleftrightarrow \quad x \in]-\infty; -\sqrt{3}] \cup [\sqrt{3}; +\infty[\qquad \text{ce qui prouve que}$$

$$-x^2 - 2x + 2 \leqslant -2x - 1 \quad \Longleftrightarrow \quad \boxed{x \in]-\infty; -\sqrt{3}] \cup [\sqrt{3}; +\infty[}$$