Suites géométriques

Exercice 1 : De la Terre à la Lune

Une feuille de papier a un dixième de millimètre d'épaisseur. On note $u_0 = 0,1$. On la plie la feuille en deux, et on note u_1 l'épaisseur du pliage obtenu. On recommence plusieurs fois de fois de suite cette opération, et on note u_n l'épaisseur obtenue après le $n^{\text{ième}}$ pliage.

1. Calculer les valeurs de u_1, u_2, u_3.
2. Caractériser la suite (u_n) ainsi obtenue.
3. On plie la feuille 30 fois de suite. Quelle est l'épaisseur obtenue ?
4. Sachant que la distance Terre – Lune est d'environ 384 000 km, combien de fois faudra-t-il plier la feuille pour obtenir cette distance ?

Exercice 2 : Datation au Carbone 14

Les êtres vivants retiennent dans leurs tissus un isotope du carbone 12 : le carbone 14. La proportion entre les deux carbones reste constante dans l'organisme vivant. Après la mort, alors que la quantité de carbone 12 reste constante, le carbone 14 se désintègre (il est donc radioactif). C'est en mesurant cette désintégration que les archéologues peuvent dater les objets. On sait que le carbone 14 se désintègre à raison de $1,2$ % tous les 100 ans environ.

a) On dispose d'un échantillon contenant 5 grammes de carbone 14. Combien en contiendra-t-il dans 1000 ans ? dans 3500 ans ?

b) On a découvert dans une grotte en Dordogne un foyer contenant du charbon de bois. À quantité égale, on a mesuré qu'un charbon de bois actuel contient $1,5$ fois plus de carbone 14 que le charbon de bois trouvé dans la grotte (autrement dit, la quantité de carbone 14 a été divisé par $2,5$ depuis la mort du bois devenu charbon). En déduire une datation de l'occupation de la grotte.

Exercice 3 : Somme des premiers termes d'une suite géométrique

1. Développer chacune des expressions suivantes :
   - *a*) $(1-X)(1+X)$
   - *b*) $(1-X)(1+X+X^2)$
   - *c*) $(1-X)(1+X+X^2+X^3)$
   - *d*) $(1-X)(1+X+X^2+X^3+X^4)$
   - *e*) $(1-X)(1+X+X^2+X^3+X^4+X^5)$
   - *f*) et $(1-X)(1+X+X^2+X^3+X^4+X^5+\cdots+X^{n-1}+X^n)$ à votre avis ?
2. Soit u une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q.
   - *a*) Exprimer u_n en fonction de u_0, q et n (n désignant un entier strictement positif).
   - *b*) En vous servant des questions précédentes, montrer que

$$u_0+u_1+u_2+\cdots+u_{n-1}+u_n = u_0 \times \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$