Suites arithmétiques

Exercice 1 : Montrer qu'une suite est arithmétique

Montrer que la suite définie par $u_n = -1 + n$ est arithmétique et déterminer sa raison.

Exercice 2 : Détermination d'une suite arithmétique à partir de deux de ses termes

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique telle que $u_2 = 10$ et $u_{47} = 68,5$. Déterminer le premier terme u_0 et la raison r.

Exercice 3 : Suite : une application directe du cours

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier $n \geqslant 0$ par

$$u_0 = -5 \qquad \text{et} \qquad u_{n+1} = u_n + \frac{5}{2}$$

1. Calculer u_1, u_2, u_3 et u_4.
2. Préciser, en les justifiant, la nature et les caractéristiques de cette suite.
3. Exprimer u_n en fonction de n. Calculer u_{117}.
4. Représenter graphiquement la suite (u_n).
5. Calculer $S = u_0 + u_1 + \cdots + u_{117}$. (Valeur exacte, puis valeur approchée à 10^{-3} près.)

Exercice 4 : Placements avec intérêts simples

On place un capital $C_0 = 3\,600$ F à 7% par an avec intérêts simples (chaque année, on touche les intérêts du capital initial). On note C_n le capital obtenu (appelé aussi *valeur acquise*) au bout de n années.

1. Calculer C_1, C_2, C_3.
2. *a*) Donner pour tout entier n l'expression de C_{n+1} en fonction de C_n.
   b) En déduire que les nombres $C_0, C_1, C_2, \ldots C_n$ sont des termes successifs d'une suite arithmétique de premier terme C_0 et dont on précisera la raison.
   c) Donner l'expression de C_n en fonction de n. Calculer C_{14} et C_{15}.
3. Au bout de combien d'années le capital initial aura-t-il doublé ?

Exercice 5 : Amortissement d'une machine outil

On souhaite amortir une machine achetée 120 000 F avec cinq annuités qui soient des termes consécutifs d'une suite arithmétique de premier terme 30 000.

Déterminer le montant de chaque annuité.

Exercice 6 : Croissance arithmétique d'un chiffre d'affaires

Le chiffre d'affaires du rayon petit outillage d'un magasin s'accroît tous les ans de 50 000 F.

En 1997, le chiffre d'affaires était de 500 000 F.

On note $C_0 = 500\,000$ et C_n le chiffre d'affaires au cours de l'année $1997 + n$.

1. Donner pour tout entier n l'expression de C_{n+1} en fonction de C_n.
2. *a*) En déduire que les nombres $C_0, C_1, C_2, \ldots, C_n$ sont des termes consécutifs d'une suite arithmétique dont on précisera la raison.
   b) Calculer C_5.
   c) Calculer le chiffre d'affaire prévisible pour 2 005.
3. Déterminer pour quelle année on peut prévoir un chiffre d'affaires de 1 050 000 francs.

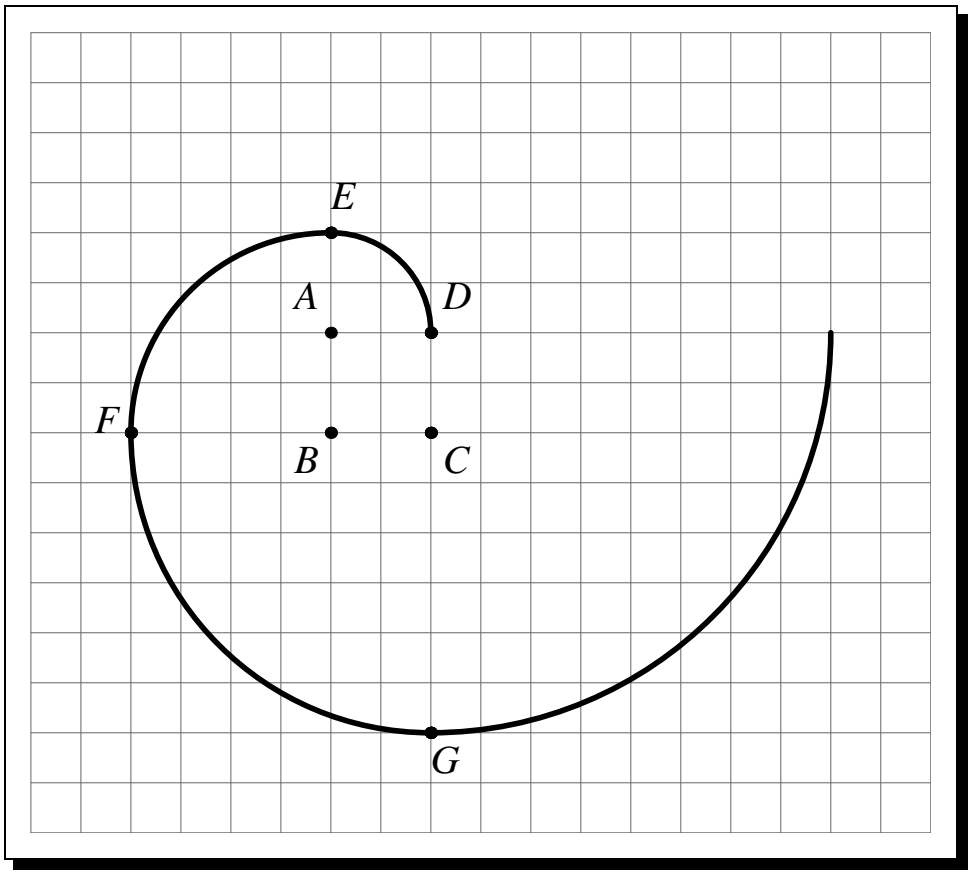
Exercice 7 : La longueur de la spirale

Il existe de nombreux procédés de construction de spirales. En voici un parmi les plus simples :

1. Au centre d'une feuille de format A4 quadrillée, tracez comme il est indiqué ci-dessous un carré $ABCD$ dont chaque côté a pour longueur 1 cm, puis :

- le quart de cercle DE centré en A
- le quart de cercle EF centré en B
- le quart de cercle FG centré en C

etc. . . , jusqu'à obtenir une dizaine de quart de cercles centrés respectivement en A, B, C, D, A, B, C, D, etc. . .



2. On note $R_1, R_2, \ldots, R_n, \ldots$ les rayons successifs des quarts de cercle ainsi dessinés. On a $R_1 = 1$ avec l'unité choisie.

a) Calculer R_2, R_3, R_4.

b) Exprimer R_{n+1} en fonction de R_n.

c) Montrer que (R_n) est une suite arithmétique dont on précisera la raison. En déduire R_n en fonction de n.

3. On note L_n la longueur de la spirale comportant n quarts de cercle.

a) Calculer L_1, L_2, L_3.

b) Déterminer L_n en fonction de n.