Études de fonctions

Exercice 1 : Études de fonctions polynômes, résolution approchée d'équation

Le plan est rapporté à un repère orthogonal $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ d'unité 2 cm sur Ox et 1 cm sur Oy.

– Partie A – Étude d'une fonction polynôme de degré 2 –

On note C_f la courbe représentative de la fonction f définie sur $[-3, 4]$ par

$$f(x) = \frac{3}{2}x^2 - 1.$$

1. *a*) Déterminer f', la fonction dérivée de f.

b) Étudier le signe de $f'(x)$ pour $x \in [-3; 4]$.

c) En déduire le tableau de variation de f sur $[-3; 4]$.

2. Déterminer une équation de T, la tangente à la courbe C_f au point d'abscisse -1.

3. Tracer la tangente T puis la courbe C_f dans le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

– Partie B – Étude d'une fonction polynôme de degré 3 –

On considère C_g, la courbe représentative de la fonction g définie sur $[-3, 4]$ par

$$g(x) = -x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 6x - 1.$$

1. *a*) Déterminer la fonction dérivée g'.

b) Expliquer pourquoi $g'(x)$ est du signe de $-x^2 + x + 2$.

c) Étudier le signe de $g'(x)$. En déduire le tableau de variation de g sur $[-3, 4]$.

2. *a*) Combien l'équation $g(x) = 0$ admet-elle de solution(s) sur $[-3, 4]$? (Justifier.) On note α la plus grande de ces solutions.

b) Déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-2} de α (justifier).

3. Déterminer, par le calcul, les coordonnées des points d'intersection des courbes C_f et C_g.

4. Tracer la courbe C_g dans le repère orthogonal $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

Exercice 2 : Polynôme de degré 4 — Résolution approchée d'équation

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^4 - 6x^2 + 5$

1. Montrer que $f'(x) = 4x(x^2 - 3)$.

2. Étudier le signe de $f'(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$. En déduire le tableau de variation de f (vous indiquerez les extréma).

3. Donner, en le justifiant, le nombre de solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation $f(x) = 0$ (on ne demande pas de résoudre cette équation). Donner ensuite, à l'aide de la calculatrice, un encadrement de la plus grande de ces solutions.

4. Donner une équation de Δ, la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse -1.

5. Tracer dans un repère orthogonal la droite Δ ainsi que la courbe représentative de f et les tangentes horizontales.